NOCIONES

DE

ALJEBRA ELEMENTAL,

ARREGLADAS AL PROGRAMA APROBADO POR LA UNIVERSIDAD

PARA EL CURSO DE HUMANIDADES,

POR

Alejandro Andonaegui.

Santiago de Chile.

IMPRENTA DE LA VOZ DE CHILE.

CALLE DE LAS ROSAS, CASA NÚM. 2.

1865

NOCIONES DE ALJEBRA ELEMENTAL.

CAPITULO PRIMERO.

Nociones preliminares.

1. Las cuestiones que se presentan sobre las cantidades numéricas pueden tratarse de una manera particular o jeneral, ya sea que nos ocupemos de la resolucion de un problema, o de la demostracion de una propiedad comun a todos los números o a una especie determinada de ellos. La aritmética resuelve las cuestiones del primer modo, conformándose así con los signos de que se sirve para representar los números, los cuales espresan un valor fijo; al paso que el *Aljebra*, cuyo carácter esencial es la jeneralidad, las trata del segundo modo.

Segun esto, es fácil comprender que para resolver un problema que se nos proponga de una manera jeneral, no puede el Aljebra emplear para representar las cantidades los mismos caracteres que se usan en aritmética; i aun cuando podriamos llegar al resultado sin el auxilio de caracteres de ningun jénero, sirviéndonos del raciocinio simplemente, no conviene seguir tal camino, porque el problema mas sencillo seria en su resolucion largo i complicado, no pudiendo tener a la vista en un cuadro reducido las diversas relaciones que deben conducirnos al resultado. Estas consideraciones se entenderán mejor con un ejemplo.

2. *Dividir un número dado en dos partes tales que la primera esceda a la segunda en una cantidad conocida.*

Del enunciado resulta que *la segunda parte es igual a la primera ménos el esceso dado*, de modo que conocida ésta, la segunda lo seria tambien; i como segun la otra condicion del problema, la suma de las dos partes debe dar el número propuesto, tendremos que *la primera parte, ménos el esceso dado, mas la primera parte da el número conocido.* Lo que puede espresarse mejor de este modo.

Dos veces la primera parte, ménos el esceso dado, es igual al número propuesto; de donde resulta que

Dos veces la primera parte es igual al número propuesto, mas el esceso dado; i finalmente, tenemos que

La primera parte es igual a la mitad de la suma del número que se quiere dividir i del esceso dado.

3. Basta el sencillo problema que precede para manifestar lo embarazoso de la marcha seguida en su resolucion, i lo que seria en otro algo complicado. Esta complicacion proviene del empleo frecuente de ciertas frases para nombrar un solo número o para indicar una operacion, i desaparece del todo usando lo que se llama *notacion aljebraica.*

En esta se representan los números por las letras del alfabeto, caracteres que no tienen por sí solos valor alguno determinado pero que pueden espresar el que queramos señalarles. Es costumbre representar por las primeras letras a, b, c......los *datos* de una cuestion, i por las últimas x, y, z las *incógnitas.* Suelen representarse por una misma letra con uno o mas acentos, diversos números de una cuestion, cuando estos tienen entre sí alguna relacion que importa tener presente.

Representadas por letras las cantidades que entran en una cuestion, es necesario espresar las relaciones que las ligan, para lo cual se usan los mismos signos que en aritmética.

De modo que

$$a+b,\ a-b,\ a\times b \text{ o } a.b,\ \frac{a}{b} \text{ o } a:b;$$

espresan la suma, diferencia, producto o cociente de dos números representados por a i b;

$$a^2,\ \sqrt{a}$$

la segunda potencia i la raiz cuadrada del número a(*); i finalmente

$$a > b,\ a < b,\ a = b$$

que el número a es mayor, menor o igual al b.

No hai pues diferencia en el modo de indicar las operaciones entre las cantidades *literales* i las aritméticas, escepto el caso de la multiplicacion que puede indicarse como mas arriba o simplemente ab, sin interposicion de signo.

Si uno de los factores fuese un número aritmético, se escribe del mismo modo pero siempre delante. Así $4\,a$ es lo mismo que $4\times a$ i se lee *cuatro a*. El número 4 se llama *coeficiente*, e indica con sus unidades las veces que debe tomarse como sumando la letra que lo lleva. El coeficiente puede ser literal i entónces es indiferente su colocacion. A toda espresion que no tiene coeficiente espreso se le considera la unidad.

4. Las cantidades espresadas por medio de la notacion aljebraica se llaman *literales* o *aljebraicas*, las cuales toman diferentes nombres segun sea su forma i naturaleza.

Toda cantidad aljebraica aislada o separada de otra por los signos $+$ o $-$, se llama *término*. Así las espresiones $4\,ab$, $2\,a^2 + 3\,bc - bd$ constan la primera de uno i la segunda de tres términos.

Si una espresion consta de un solo término se llama *monomio*,

(*) La espresion a^2 se lee *a dos*, i sus análogas a^3, a^4, etc *a tres*, *a cuatro*, etc.

como a, $2bc$, $3\ a^2\ b^3\ d$; si de dos *binomio*, como $a+b$, $2\ a^3-c$; si de tres *trinomio*, etc; i en jeneral se llama *polinomio* la que consta de mas de un término.

Un monomio es *racional* cuando no le afecta radical alguno, como ab, $2\ a^4$; e *irracional* cuando le afecta, como $\sqrt{a^2\ b^3}$, $3\sqrt[3]{c}$.

Un monomio es *entero* cuando, ademas de ser racional, no tiene denominador, i no lo es cuando falta alguna de estas condiciones.

Para que un polinomio sea racional o entero es preciso que todos sus términos lo sean.

5. *Términos semejantes* son aquellos que tienen todas las partes que los constituyen iguales, i que solo pueden diferenciarse en los coeficientes i signos. ab^2 i $6\ ab^2$ son términos semejantes.

Términos *positivos* son los que están precedidos del signo $+$ i *negativos* los que lo están del $-$. Si un término no está precedido de signo alguno se le supone positivo.

Los términos semejantes pueden *reducirse* observando la regla siguiente: *si tienen el mismo signo, se suman los coeficientes i esta suma, con el signo comun, es el coeficiente que debe darse a las letras de uno de los términos; pero si los signos son diferentes, el coeficiente del resultado es la diferencia de las sumas de los coeficientes de los términos positivos i negativos, con el signo correspondiente a la mayor.*

Ejemplos.

1.° $6\ ab+3\ ab=9\ ab$; 2.° $4\ abc^3-abc^3=3\ abc^3$

3.° $2\ ab^2+5\ ab^2+ab^2=8\ ab^2$

4.° $7\ a^2\ b^3-3\ a^2\ b^3-6\ a^2\ b^3+10\ a^2\ b^3+9\ a^2\ b^3=17\ a^2\ b^3$

5.° $a^3bc-2\ a^3bc+4\ a^3cb+7\ a^3bc-8\ a^3bc-9\ bca^3=-7\ a^3\ bc$

6.° $2\ ab^3-3\ a^4b^5+ab^3-2\ abd-cdf+5\ a^4b^5-11\ ab^3+5\ cfd-fgh$

6. Apliquemos al problema del (núm. 2) la notacion aljebraica.

Llamemos a el número que se quiere dividir i b el esceso de la primera parte sobre la segunda. Si representamos por x la primera parte, $x-b$ será la segunda; i como la suma de estas partes vale a, tendremos que

$$x-b+x=a,$$

o

$$2\ x-b=a.$$

Es claro que agregando el sustraendo a la resta debe resultar el minuendo, luego

$$2\ x=a+b.$$

De aquí resulta que

$$(1) \qquad x=\frac{a+b}{2},$$

valor que traducido al lenguaje comun es idéntico al encontrado mas arriba.

7. Observemos que el resultado (1) es una espresion aljebraica que sirve para resolver todos los problemas de la misma especie del propuesto, i que solo se diferencien por la magnitud de los datos. Es lo que se llama una *fórmula* que se *construye* para cada caso poniendo en ella en lugar de las letras los valores que les corresponden por el enunciado del problema, i ejecutando en seguida las operaciones aritméticas indicadas. Así, si a vale 10 i b 4, tendremos que

$$x=\frac{10+4}{2}=7;$$

i si de este valor restamos 4, segun lo dicho mas arriba, resulta que 7 i 3 son las dos partes en que puede descomponerse el número 10.

Con solo este problema se puede comprender cuanto abrevia i jeneraliza la resolucion de los problemas el empleo de la notacion aljebraica, i mas adelante tendremos ocasion de notarlo mejor. Las mismas ventajas se obtienen en la demostracion de los teoremas.

CAPITULO II.

Operaciones Aljebraicas.

8. ADICION.—Para indicar la suma de dos monomios se coloca entre ellos el signo $+$. Si a i b son dos monomios que se quiere sumar, escribiremos

$$a+b$$

i este será el resultado

Si a un polinomio que representaremos por A queremos sumarlo con otro tal como $a-b$, prescindiremos del término $-b$ i la suma será

$$(1)\ A+a;$$

pero la supresion del término $-b$ ha aumentado en b el segundo sumando i el resultado (1) no es el verdadero sino restándole b, lo que da

$$A+a-b$$

Ahora si A vale $c-d$ tendremos que la suma pedida es

$$c-d+a-b.$$

Esto nos manifiesta que *la suma de dos espresiones aljebraicas se obtiene escribiendo una a continuacion de la otra con sus propios signos.*

Observemos que en jeneral la suma será un polimonio complicado, susceptible de simplificacion si hai términos semejantes, pero en todo caso el último resultado ofrecerá siempre ciertas operaciones indicadas que no pueden ejecutarse sino cuando se asignan valores numéricos a las letras que entran en él.

Tomemos algunos ejemplos.

$$
\begin{array}{l}
2\,ab-3\,a^2b-4\,abc \\
2\,ac^2+3\,ab-7\,a^2b^3+5\,a^2b \\
abc-2\,b^3 \\
\hline
5\,ab+2\,a^2b-3\,abc+2\,ac^2-7\,a^2b^3-2\,b^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
4\,a^2b^2-7\,a^3b+4\,ab^3c^2+5\,bd \\
7\,a^2b^2-4\,a^3b+10\,ab^3c^2-8\,bd \\
6\,a^2b^2+3\,a^3b-5\,ab^3c^2+2\,bd \\
\hline
17\,a^2b^2-8\,a^3b+9\,ab^3c^2-bd
\end{array}
$$

9. SUSTRACCION.—Para restar dos monomios se escriben uno a continuacion del otro interponiendo el signo — i la espresion que resulta es la diferencia. Así, si de a debe restarse b tendremos que

$$a-b$$

es la resta.

Sea A un polinomio del cual se quiere restar el $a-b$; prescindiendo del término negativo del sustraendo el problema se reduce a restar de A el monomio a, lo que se espresa como sigue

$$A-a;$$

pero como esta resta no es la verdadera por haber aumentado el sustraendo en b, tendremos que agregarle esta cantidad para hallar el resultado pedido, lo que nos dá

$$A-a+b.$$

De modo que *para restar dos espresiones aljebraicas se cambian los signos de todos los términos del sustraendo i en seguida se suman.*

La observacion del número anterior es tambien aplicable a la sustraccion.

Del polinomio $4\,ab^2-3\,a^3c+5\,a^2b^2$ queremos restar el $2\,ac^2-5\,a^3c+6\,a^2b^2$. La operacion se indica así:

$$4\,ab^2-3\,a^3c+5\,a^2b^2-(2\,ac^2-5\,a^3c+6\,a^2b^2);$$

i para efectuarla, al cambiar los signos, se da a los polinomios esta disposicion:

$$\begin{array}{l} 4\,ab^2-3\,a^3c+5\,a^2b^2 \\ -2\,ac^2+5\,a^3c-6\,a^2b^2 \\ \hline 4\,ab^2+2\,a^3c-a^2b^2-2\,ac^2 \end{array}$$

Este último polinomio es la resta, hechas ya las reducciones a que habia lugar.

10. MULTIPLICACION.—Ya hemos dicho como se indica la multiplicacion entre cantidades literales tales como a i b. Si dichas cantidades son iguales, en lugar de escribir $aaaa$, el producto se espresará como en aritmética a,^{4} notacion de que ya habiamos hecho uso.

El producto que se obtiene multiplicando varias veces por sí mismo un número cualquiera se llama *potencia* de este número. Si el número se ha multiplicado una, dos, tres, etc, veces por sí mismo resulta la *segunda*, *tercera*, *cuarta*, etc. potencia de ese número. En una potencia hai que considerar tres números: el que se multiplica por sí mismo, que se llama *raiz* o *base*, el que indica con sus unidades las veces que ésta entra como factor, que se llama *esponente*, i finalmente la potencia misma. En el ejemplo de arriba a es la base, 4 el esponente i a^4, que se lee *a elevado a la cuarta potencia* o simplemente *a cuatro*, la potencia.

11. Si tuvieramos la espresion a^2a^5 podriamos escribirla con mas brevedad observando que

$$a^2=aa \quad \text{i } a^5=aaaaa;$$

lo que nos hace ver que

$$a^2a^5 = aaaaaaa = a^7,$$

o

$$a^2a^5 = a^{2+5}$$

De aquí concluimos que *el producto de dos potencias de la misma base se obtiene elevando ésta a un esponente igual a la suma de los esponentes de los factores.*

12. Sean $3\ a^2b^3c$ i $7\ a^3bd$ dos monomios cuyo producto se quiere obtener. La operacion se indica así:

$$3\ a^2b^3c \times 7\ a^3bd.$$

Como el producto no altera si se cambia el órden de los factores, podemos, para dar una forma mas simple a la espresion, escribirla de este modo:

$$3 \times 7\ a^2a^3b^3bcd;$$

i efectuando la multiplicacion de los números aritméticos i aplicando la regla dada (núm. 11), tendremos que el producto pedido es

$$21\ a^5b^4cd.$$

Luego, *para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes i a continuacion se escriben sus diferentes letras cada una con un esponente igual a la suma de los que tienen en los factores.*

13. Propongámonos hallar el producto de $a-b$ por c.

La cuestion no tiene dificultad si se prescinde del término $-b$, i el resultado es en este caso

$$ac.$$

Pero si en lugar de repetir al multiplicando $a-b$ tantas veces como lo indica c, repetimos solo a a, el producto quedará aumentado en bc, cantidad que es preciso restar del producto obtenido para encontrar el verdadero resultado. El producto pedido es pues

$$ac-bc.$$

Para hallar el producto de $a-b$ por $c-d$ se sigue una marcha análoga. Así, haciendo abstraccion del segundo término del multiplicador, obtendriamos por producto, segun hemos visto,

$$ac-bc;$$

pero de este modo el multiplicando $a-b$ se ha tomado d veces mas de lo que se debiera, i entónces es necesario quitar del producto anterior el de $a-b$ por d. Este último es

$$ad-bd,$$

i restado de $ac-bc$ nos da

$$ac-bc-ad+bd.$$

Observando lo que hemos hecho en los problemas anteriores deducimos la regla siguiente: *para multiplicar dos espresiones aljebraicas se multiplica cada término del multiplicador por todos los del multiplicando, dando a cada término del producto el signo + si proviene de dos términos del mismo signo, i el — en el caso contrario, i la suma de todos los productos parciales con sus signos respectivos es el producto total.*

Vemos, segun esta regla, que cuando se multiplican dos términos que tienen el mismo signo, el producto debe considerarse afectado del signo +, i que, por el contrario, debe mirarse como negativo el producto cuando los términos multiplicados tienen signos diferentes. Esta regla se espresa en la práctica, breve aunque incorrectamente, de este modo:

Signos iguales multiplicados dan + i desiguales —. Así,

$$\begin{array}{ccccc} + & \times & + & \text{da} & + \\ + & \times & - & & - \\ + & \times & - & & - \\ - & \times & - & & + \end{array}$$

14. Para indicar la multiplicacion de dos espresiones aljebraicas cuando una o las dos son polinomios se encierran éstos dentro de un paréntesis i se pone el signo de multiplicar entre ellos. Si se quiere multiplicar $a+b-c$ por d, la operacion se indica así:

$$(1)\ (a+b-c)\times d,$$

i el producto es

$$(2)\ ad+bd-cd.$$

Cuando la espresion (2) se escribe bajo la forma (1) se dice que se ha sacado en ella a d *factor comun.*

Hallemos el producto del polinomio $2\,ab+3\,a^3b^2-cd$ por $ac-4\,bc$. Por comodidad en la práctica se da al cálculo la siguiente disposicion.

$$\begin{array}{l} 2\,ab+3\,a^3b^2-cd \\ \underline{ac-4\,bc} \\ 2\,a^2bc+6\,a^4b^2c-ac^2d \\ -8\,ab^2c-12\,a^3b^3c+4\,bc^2d. \end{array}$$

15. Tomemos otros ejemplos.

$$\begin{array}{lll} \text{1.}^{\circ} & \text{2.}^{\circ} & \text{3.}^{\circ} \\ a+b & a-b & a+b \\ \underline{a+b} & \underline{a-b} & \underline{a-b} \\ a^2+ab & a^2-ab & a^2+ab \\ \underline{ab+b^2} & \underline{-ab+b^2} & \underline{-ab-b^2} \\ a^2+2\,ab+b^2 & a^2-2\,ab+b^2 & a^2-b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{4.}^{\circ} \\ a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\ \underline{a-b} \\ a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4 \\ \underline{-a^4-ba^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5} \\ a^5-b^5 \end{array}$$

16. Observémos que en jeneral el producto de dos polinomios no tiene el número de términos que debia resultar segun la regla dada (núm. 13). Segun esta regla cada término del multiplicador da al producto tantos términos cuantos tiene el multiplicando, de modo que el número total de términos se obtendrá multiplicando el número de términos que tiene el multiplicador por el que tiene el multiplicando. Las reducciones que se operan en estos productos parciales es lo que disminuye el número total de términos del producto. La disminucion tiene sin embargo su límite; porque la multiplicacion de un término del multiplicador en que una letra cualquiera se halla elevada al mayor esponente por el término del multiplicando en que la misma letra tiene el mayor esponente, da al producto un término en que esta letra está elevada tambien al mayor esponente, i no puede por lo tanto reducirse con ningun otro. Esto que decimos de los términos que contienen una letra con el mayor esponente se aplica igualmente a los que contienen dicha letra con el esponente menor.

De lo espuesto concluimos que el producto de dos polinomios o de un polinomio por un monomio es precisamente un polinomio; i que el menor número de términos que puede tener el producto, despues de efectuadas las reducciones, es dos.

El ejemplo del (núm. 14) da un producto con el mayor número de términos i el 4.° del (núm. 15) con el menor.

17. DIVISION.—Como el dividendo es el producto del divisor por el cociente tendremos que éste será positivo o negativo segun que aquellos tengan el mismo o diferentes signos, lo que se espresa diciendo que *signos iguales divididos dan* + *i desiguales*—.

18. Nos proponemos hallar el cociente del monomio $4\ a^3b^5c$ dividido por $2\ ab^2$. Como sabemos que el dividendo es el producto del divisor por el cociente, éste es un monomio positivo cuyo coeficiente multiplicado por 2 que es el del divisor debe dar 4 que es el del dividendo; luego 2, cociente de estos coeficientes, es el coeficiente del cociente buscado. Del mismo modo a^3 es el producto de a por esta misma letra con el esponente que tenga en el cociente: este esponente es evidentemente 2 i entónces a^2 debe entrar en el cociente. Continuando así se encuentra que el cociente pedido es 2 a^2b^3c. Luego,

$$\frac{4\ a^3b^5c}{2\ ab^2}=2\ a^2a^3c.$$

Concluimos de aquí que *el cociente de la division de dos monomios se obtiene dividiendo los coeficientes i restando de los esponentes de las letras del dividiendo los de las letras respectivamente iguales del divisor.*

19. Si se quiere dividir a^m por a^n tendremos por cociente a^{m-n}. En esta espresion puede suceder que m sea igual a n, en cuyo caso resulta que

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=a^0 \text{ o bien } \frac{a^m}{a^m}=1=a^0.$$

Segun esto se ve que el esponente cero, a primera vista inesplicable, nace de la division de dos cantidades iguales afectadas del mismo esponente *Toda cantidad elevada al esponente cero tiene, pues, por valor la unidad.*

Si $m<n$ la sustraccion no se puede ejecutar i tampoco por consiguiente la division, la cual tendrá que quedar indicada.

De lo espuesto resulta que la division de dos monomios no se efectúa exactamente: 1.° cuando el coeficiente del dividendo no es divisible por el del divisor; i 2.° cuando este contiene alguna letra que no se halla en el dividendo o que hallándose tiene un esponente menor que en el divisor.

20. La division de un polinomio por un monomio no ofrece dificultad cuando se conoce la de los monomios. En efecto, si se trata de dividir el polinomio 12 $a^3b^2c+8\ a^2b^2-6\ a^4bd$ por 2 a^2b, bastará recordar lo dicho (núm. 16 i 17) para comprender que el cociente debe ser un polinomio cuyos términos son los cocientes de los del dividendo por el divisor. En el ejemplo propuesto tendremos que

$$\frac{12\,a^3b^2c+8\,a^2b^3-6\,a^4bd}{2\,a^2b}=6\,abc+4\,b-3\,a^2d$$

La division no se efectúa exactamente sino cuando todos los términos del dividendo son divisibles por el divisor como sucede en el ejemplo precedente.

21. Vamos a determinar el cociente que resulta de dividir un polinomio P por otro P'.

Llamemos C el polinomio cociente. Como el dividendo P es el producto del divisor P' por el cociente C, P será la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar los diversos términos de C por P'; pero como al efectuar la suma de esos productos se hace la reduccion de los términos semejantes, en jeneral no se sabe que término del divisor ha producido un término dado del dividendo, circunstancia de donde nace la dificultad para encontrar el cociente. Sin embargo, segun lo manifestado en el (núm. 16), es claro que dividiendo el término de P que contiene a una letra cualquiera elevada al mayor esponente por el de P' que contiene a esa misma letra elevada tambien al mayor esponente, obtendremos un término del cociente pedido C en que la letra mencionada tiene el mayor esponente en el cociente.

Multiplicando este término de C por P' i restando este producto del divendo P, la diferencia nos dará el producto del divisor por los terminos restantes del cociente. Llamemos R esta resta.

La determinacion de otro término del cociente no ofrece ya dificultad: R hace ahora de dividendo, P' es siempre el divisor, i el cociente es C ménos el término encontrado. Para hallar un término del cociente en esta nueva division que se presenta es preciso proceder como anteriormente, i así se continúa hasta determinar todos los términos del cociente.

En la práctica de la division conviene colocar los términos del dividendo i divisor segun las potencias descendentes de la letra que se elija, lo que se llama *ordenar* los polinomios.

Concluimos de lo espuesto que *para hallar el cociente de la division de dos polinomios se ordenan con respecto a una letra, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor i se obtiene así el primer término del cociente; este término se multiplica por el divisor i el producto se resta del dividendo. El primer término de la resta se divide por el primero del divisor i resulta el segundo término del cociente; éste se multiplica por el divisor i el producto se resta del dividendo. Esto mismo se continúa hasta obtener una resta cero.*

Hé aquí como se dispone el cálculo:

$$\begin{array}{l|l}
2a^4b^3-12a^3b^3-7a^2b^2c+42\,ab^2c+2\,a^2b^4c-7\,b^3c^2 & a^2b-6\,ab+b^2c \\ \cline{2-2}
-2a^4b^3+12a^3b^3-2a^2b^4c & 2\,a^2b^2-7\,bc \\ \cline{1-1}
-7a^2b^2c+42ab^2c-7b^3c^2 \quad 1.^a \text{ resta.} & \\
7a^2b^2c-42ab^2c+7b^3c^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Ordenados los polinomios con respecto a las potencias descendentes de la letra a, se ha dividido el primer término del dividendo por el primero del divisor i el cociente $2\,a^2b^2$, primer término del cociente total, se ha multiplicado por el divisor; este producto se ha escrito debajo del dividendo despues de haber cambiado el signo a todos sus términos con el fin de efectuar la resta, i hechas las reducciones ha resultado la 1.ª resta. En seguida se ha dividido el primer término de la resta por el primero del divisor i el cociente $-\,7\,bc$ es el segundo término del cociente total. Procediendo con éste del mismo modo que con el primero se ha encontrado cero por resta, lo que manifiesta que la division se efectúa exactamente.

22. Si los polinomios que se están dividiendo se han ordenado segun las potencias descendentes de una letra, i en el curso de la division se obtiene una resta cuyo primer término contiene a esa letra con un esponente menor que el que tiene en el primero del divisor, la division no se efectúa exactamente i aquella resta es la de la operacion. Por ejemplo:

$$
\begin{array}{ll}
x^4-5\,a^2x^2+a^3x+3\,a & \underline{\left|\,x^2+3\,ax+2\,a^2\right.} \\
\underline{-x^4-3\,ax^3-2\,a^2x^2} & \;\; x^2-3\,ax+2\,a^2 \\
-3\,ax^3-7\,a^2x^2+a^3x+3\,a & \\
\underline{+3\,ax^3+9\,a^2x^2+6\,a^3x} & \\
\qquad 2\,a^2x^2+7\,a^3x+3\,a & \\
\qquad \underline{-2\,a^2x^2-6\,a^3x-4\,a^4} & \\
\text{Resta} \qquad a^3x-4\,a^4+3\,a &
\end{array}
$$

El primer término de la resta a^3x contiene a la letra x segun la cual se han ordenado los polinomios con un esponente menor que 2, que es el que tiene en el primero del divisor, i la operacion no puede entónces continuarse.

23. POTENCIAS I RAICES DE LOS MONOMIOS.—En virtud de la definicion de potencia, para elevar un monomio a una potencia, es necesario escribirlo tantas veces como factor cuantas unidades tiene el esponente de la potencia a que se quiere elevar, i el producto que resulte será la potencia buscada.

Sea $4\,a^2b^3c$ el monomio que queremos elevar a la segunda potencia; tendremos que

$$(4\,a^2b^3c)^2=4\,a^2b^3c\times 4\,a^2b^3c=16\,a^4b^6c^2$$

Del mismo modo,

$$(4\,a^2b^3c)^p=4\,a^2b^3c\times 4\,a^2b^3c\times 4\,a^2b^3c\times\cdots\cdots=4^p\,a^{2p}\,b^{3p}\,c^p.$$

Luego, *para elevar un monomio a una potencia se eleva el coeficiente i los esponentes de las letras se multiplican por el grado de la potencia.*

24. Si en una potencia se conoce ésta i el esponente se puede determinar la base o raiz. La operacion por medio de la cual se encuentra esa raiz se llama *estraccion de raiz.* Para indicar esta operacion, como sabemos, se escribe debajo del signo radical $\sqrt{}$ el número de que queremos estraer raiz, i entre las ramas del radical el esponente (escepto el índice 2 que no se escribe) que aquí toma el nombre de *indice del radical*. El índice del radical indica el grado de la raiz, como en la elevacion á potencia el esponente indica el grado de la potencia; i así si el índice es 2, 3, 4, etc., la raiz se llama 2ª, 3ª, 4ª, etc. Las raices 2ª i 3ª tienen los nombres particulares de *cuadrada* i *cúbica*. La raiz 5ª de a se espresa así:

$$\sqrt[5]{a}$$

Determinemos la raiz del grado m de a^m. Como la raiz de un número elevado a la potencia indicada por el grado de la raiz debe producir dicho número, se sigue que a es la raiz pedida, i tendremos que

$$\sqrt[m]{a^m}=a$$

Si el esponente de la letra subradical es diferente del índice, es tabien fácil obtener la raiz. Sea a^n el número de que queremos obtener la raiz m, i $n=mp$; tendremos que

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m]{a^{mp}}=\sqrt[m]{(a^p)^m}=a^p=a^{\frac{n}{m}}$$

Vemos, pues, que *para estraer la raiz de una letra afectada de un esponente, es necesario dividir este esponente por el índice del radical i poner este cociente por esponente a la letra.*

25. $$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=ab$$

Esta espresion demuestra que *la raiz de un producto es igual al producto de las raices de los factores.*

26. Propongámonos hallar la raiz cúbica de un monomio tal como 27 $a^3b^6c^9$. Segun lo dicho mas arriba,

$$\sqrt[3]{27\ a^3b^6c^9}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^6}\times\sqrt[3]{c^9}=3\ ab^2c^3$$

De aquí resulta que *la raiz de un monomio se encuentra estrayendo la del coeficiente i dividiendo los esponentes de las letras por el índice del radical.*

$$\sqrt[5]{a^5b^{10}}=ab^2\ ;\ \sqrt[4]{m^8n^4p^{12}}=m^2np^3.$$

Si alguno de los esponentes de las letras no es divisible por el índice del radical, el monomio no tiene raiz exacta, i la operacion queda solo indicada.

27. FRACCIONES ALJEBRAICAS.—Una division que no se puede efectuar exactamente i que por lo tanto se deja indicada, es una fraccion aljebraica. La fraccion aljebraica tiene por términos espresiones cualesquiera, lo que no sucede con la fraccion aritmética cuyos términos han de ser precisamente enteros.

Sea $\frac{a}{b}$ una fraccion i c su valor, i tendremos que

$$\frac{a}{b}=c \text{ i de aquí } a=bc.$$

Multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por un número cualquiera m i resultará que

$$am=bcm,$$

i dividiendo por bm los dos miembros de esta última igualdad hallaremos por fin que

$$\frac{am}{bm}=c.$$

Así, *el valor de unà fraccion no altera multiplicando sus dos términos par un mismo número.*

Resulta tambien que *para reducir las fracciones a un comun denominador, basta multiplicar los dos términos de cada fraccion por el producto de los denominadores de las otras.* Así las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ reducidas a un comun denominador son $\frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{ebd}{bdf}$

28. Si queremos sumar las fracciones $\frac{a}{d}$ i $\frac{b}{d}$ que tienen el mismo denominador, hagamos $\frac{a}{d}=c$ i $\frac{b}{d}=c'$, i tendremos que $a=cd$ i $b=c'd$. Sumando ordenadamente estas igualdades encontraremos que

$$a+b=cd+c'd, \text{ i de aquí } \frac{a+b}{d}=c+c'=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}$$

Para sumar las fracciones, despues de reducidas a un comun denominador, se suman los numeradores i a esta suma se le pone por denominador el denominador comun.

Como anteriormente se deduce que

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d};$$

lo que nos dice que *para restar dos fracciones que tienen el mismo denominador se restan los numeradores i a esta diferencia se la divide por el denominador comun.*

29. Para hallar el producto de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ haremos $\frac{a}{b}=e$ i $\frac{c}{d}=e'$, i nos resultará que $a=be$ i $c=de'$, de donde sacamos que $ac=be\,.\,de'$ o $ac=bd\,.\,ee'$; lo que nos da $\frac{ac}{bd}=ee'=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$

De modo que *para multiplicar dos fracciones se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores.*

30. El cociente de dos fracciones se obtiene fácilmente, porque dividiendo ordenadamente las dos igualdades $a=be$ i $c=de'$, resulta que

$$\frac{a}{c}=\frac{be}{de'};$$

i multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $\frac{d}{b}$ hallamos

$$\frac{ad}{cb}=\frac{e}{e'}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}.$$

Vemos que *para dividir dos fracciones es necesario invertir el órden de los términos del divisor i multiplicarlo despues por el dividendo.*

31. Sea $\frac{a}{b}$ una fraccion que queremos elevar a la potencia m. Por lo dicho (núm. 10) tendremos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{aaa\ldots\ldots}{bbb\ldots\ldots}=\frac{a^m}{b^m}.$$

Una potencia cualquiera de una fraccion de forma elevando los dos términos de ésta a la misma potencia.

32. Estrayendo la raiz m de los dos miembros de la igualdad $a=bc$ nos resulta que

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c} \text{ i de aquí}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

La raiz de una fraccion se encuentra estrayendo la del mismo grado de sus dos términos.

33. Conviene ejercitarse en los ejemplos siguientes:

1.° $\frac{x}{6\,a^2b^3}+\frac{y}{8\,a^4b}+\frac{z}{24\,a^2b^2c}-\frac{u}{3\,ah}$ 2.° $\frac{2\,a}{2\,b-c}\left(\frac{b+c}{3}-\frac{c}{2}\right)$

3.° $\left(\frac{3\,a^3b^2c}{2\,d^2c}\right)^2$ 4.° $\sqrt{81\,a^6b^4c^2}$ 5.° $\sqrt{\frac{64\,a^6b^2}{9\,c^4d^2}}$

6.° $\sqrt[3]{\frac{27\,a^7b^6}{64c^9d^{12}}}$ 7.° $\frac{a+\frac{b-a}{1+ba}}{1-a\frac{b-a}{1+ba}}$ 8.° $\frac{a+c\frac{by-ax}{cx-by}}{b}$

CAPITULO III.

Ecuaciones de primer grado.

34. Las espresiones aljebraicas que no se diferencian en nada se llaman *idénticas*. Entre dos espresiones de esta clase evidentemente se puede establecer el signo $=$, i resulta entónces una identidad.

$$a+b=a+b,\ 3-x=3-x,\ 4=4\ 0=0,$$

son identidades literales o numéricas.

Las espresiones no idénticas solo porque hai operaciones indicadas i que una vez efectuadas se convertirian en idénticas, se denominan *iguales*. Es tambien claro que dos espresiones de esta naturaleza pueden ligarse por el signo $=$, dando oríjen a lo que se llama *igualdad*. Las igualdades pueden ser, como las identidades, literales o numéricas. Por ejemplo:

$$3+4\times 2=3\times 6-7,\quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

son igualdades.

Pero hai espresiones, precisamente literales, que no se hacen idénticas aun despues que se ejecutan las operaciones indicadas. Estas espresiones, sin embargo, pueden jeneralmente convertirse en idénticas poniendo en lugar de una o mas letras de las que las constituyen ciertos valores particulares; con el fin de hallar estos valores se establece entre ellas el signo $=$, i se tiene así una espresion que se llama *ecuacion*.

Si en la ecuacion (1) hacemos $x=8$ i en la (2) $x=3$ e $y=7$, estas ecuaciones se transforman en identidades.

(1) $\quad 3x-2=x+10;\ x=6;\ 16=16.$

(2) $\quad x+y=2x+4;\ x=3,\ y=7;\ 10=10.$

Puede suceder que no haya valores que sustituidos en lugar de ciertas letras en dos espresiones aljebraicas, las hagan idénticas, en cuyo caso la ecuacion no existe, es absurda.

Ecuacion es pues la relacion de igualdad establecida hipotéticamente entre dos espresiones aljebraicas con el fin de hallar los valores que puestos en lugar de ciertas letras la conviertan en una identidad.

Las espresiones separadas por el signo $=$ en una ecuacion se llaman *miembros:* la espresion que está a la izquierda del signo $=$ se denomina *primer miembro*, i la que está a la derecha *segundo miembro.*

La letra que es preciso reemplazar por un valor particular para que una ecuacion se convierta en identidad, se llama incógnita. Una ecuacion puede tener una o muchas incógnitas. En la ecuacion (1) x es la incógnita i 6 es el valor de ésta, puesto que sustituido en lugar de x la ecuacion se reduce a identidad.

Resolver una ecuacion es hallar los valores de las incógnitas. La ecuacion (2) queda resuelta desde que se determinan los valores 3 i 7 de las incógnitas x e y que la transforman en una identidad $10=10$.

25. *Ecuaciones equivalentes son aquellas que se satisfacen con los mismos valores de las incógnitas.*

Si una ecuacion $M=N$ se satisface con ciertos valores de las incógnitas, la ecuacion $M+a=N+a$ se satisface con los mismos i es por lo tanto equivalente a la primera; porque M i N pueden considerarse como espresiones idénticas que quedarán siempre tales agregando a ambas el mismo número b. Lo mismo sucederia si se quitase a los dos miembros de la ecuacion propuesta el mismo número. De manera que una ecuacion no altera si se agrega o resta a sus dos miembros un mismo número, i por consiguiente se puede trasladar un término cualquiera de un miembro a otro cambiándole el signo. Por ejemplo:

$$\text{(m)} \qquad a-xb=cx-d$$

se convierte en $\qquad ax-cx=b-d,$

agregando a los dos miembros de la ecuacion (m) $b-cx$.

36. Es igualmente cierto que la ecuacion $M=N$ no altera si se multiplican o dividen sus dos miembros por un mismo número, con tal que éste no contenga la incógnita; de donde resulta que una cantidad que está multiplicando o dividiendo en un miembro pasa al otro a dividir o multiplicar. Así,

$$ax=b \text{ i } x=\frac{b}{a} \text{ son ecuaciones equivalentes.}$$

Pero si la espresion porque se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuacion contiene la incógnita, la ecuacion que resulta no es equivalente a la propuesta. La ecuacion $2\,x=6$ se verifica únicamente con el valor 3; pero si multiplicamos sus dos miembros por $x-1$, vemos que la nueva ecuacion $2\,x(x-1)=6(x-1)$ se satisface tambien con el valor 3 i ademas con el valor 1 que no cumple con la ecuacion dada.

37. Las ecuaciones se dividen en *grados*. El grado de una ecuacion lo señala el mayor esponente de su incógnita, si ésta no se encuentra en el denominador. Si la ecuacion tiene varias incógnitas, el grado de la ecuacion lo marca la mayor suma de los esponentes de las incógnitas multiplicadas. La ecuacion es de 1.°, 2.°, etc. grado si ese esponente o suma de esponentes es uno, dos, etc.

Las ecuaciones

$2\,x+1=7\,y-x$, $ax+b=3x-c$, $ax=b$, en que x e y son incógnitas, son de 1.er grado.

$3\,x^2+2\,x-1=0$, $xy=7$ son ecuaciones de segundo grado, siendo x e y las incógnitas.

Una ecuacion es *numérica* cuando los coeficientes de sus términos son números aritméticos, i *literal* si dichos coeficientes son literales.

38. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA IN-

COGNITA.—Toda ecuacion de primer grado con una incógnita, en virtud de lo espuesto (números 35 i 36), puede tomar esta forma

$$(1) \qquad Ax=B.$$

Si dividimos por el coeficiente de x los dos miembros de esta ecuacion hallaremos que

$$(2) \qquad x=\frac{B}{A}$$

La ecuacion (2) se verifica evidentemente con poner $\frac{B}{A}$ en lugar de x; i como ésta es equivalente a la (1), resulta que $\frac{B}{A}$ es el valor de la incógnita de esta ecuacion.

Nada mas fácil que resolver una ecuacion de la forma (1); pero si la ecuacion que se da es complicada, haciendo uso de lo dicho (núm. 35 i 36), se la reducirá a la forma indicada; i dividiendo entónces por el coeficiente de la incógnita, a lo que se llama *despejarla*, se tendrá el valor de ésta.

Sea la ecuacion que se quiere resolver

$$(3) \qquad 3x-2=14-x.$$

Traslademos al primer miembro el término $-x$, i el -2 al segundo, i tendremos que

$$3x+x=14+2;$$

i efectuando las reducciones hallaremos que

$$4x=16.$$

Despejando la incógnita encontramos que

$$x=\frac{16}{4}=4.$$

Este valor 4 cumple con la ecuacion (3), puesto que reemplazando en ella x por 4 encontramos la identidad

$$10=10.$$

39. Resolvamos esta otra ecuacion

$$(4) \qquad \frac{7x}{2}-4=3x+\tfrac{1}{3}$$

Para hacer desaparecer los denominadores, segun lo manifestado en el (núm. 36), será preciso multiplicar los dos miembros de la ecuacion por el producto de los denominadores de los términos que los tienen, i la ecuacion (4) se convertirá entónces en esta otra

$$\frac{42x}{2}-24=18x+\frac{6}{3},$$

o bien

$$21x-24=18x+2.$$

De aquí resulta

$$21x-18x=2+24,$$

o

$$3x=26,$$

i finalmente

$$x=8\tfrac{2}{3}$$

En jeneral, *para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita se quitan los denominadores multiplicando los dos miembros de la ecuacion por el producto de todos ellos; se trasladan al primer miembro los términos que contienen la incógnita i al segundo los que no la contienen; se ejecutan las reducciones a que haya lugar, i por último se despeja la incógnita.*

40. Ejemplos:

1.° $2x-1=5-x$; $x=6$ 2.° $3x-16-x=0$; $x=8$

3.° $\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}x+2$ 4.° $\frac{2+x}{3}-x=5-\frac{3x+2}{2}$

11. DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.—1.° En el valor

$$(1) \qquad x=\frac{B}{A}$$

deducido de la ecuacion

$$(2) \qquad Ax=B,$$

puede suceder que A tenga un valor cualquiera, pero que no sea cero. En este caso la ecuacion (1) se verifica únicamente con el valor $\frac{B}{A}$, i la (2), que es equivalente a aquella, se satisface tambien con el mismo valor. Si B fuese cero, el valor de x seria cero i la ecuacion (2) se convertiria en la identidad $0=0$ por la sustitucion de este valor en la ecuacion.

Resulta de aquí que la ecuacion (2) admite un solo valor para su incógnita.

2.° Si A fuese cero i B no lo fuese, la espresion (1) tomaria esta forma

$$(3) \qquad x=\frac{B}{0}$$

Investiguemos lo que significa el cociente de la division de un número por 0. Sabemos que el valor de una fraccion cuyo numerador es constante depende del que le demos al denominador; i así, si en la fraccion $\frac{m}{z}$ hacemos que z tome un valor 10, 100, 1000 veces menor, el valor de la fraccion se hará 10, 100, 1000 veces mayor; de modo que disminuyendo el denominador indefinidamente el valor de la fraccion crece indefinidamente, i cuando aquel se haga infinitamente pequeño o cero la fraccion habrá tomado un valor infinitamente grande.

Consideraremos pues el cociente de un número cualquiera dividido por cero como el *símbolo del infinito*, que se representa así ∞

El valor (3) es pues infinito. Introduzcamos en la ecuacion (2) la condicion $A=0$ que nos ha producido este valor infinito, i hallaremos que

$$(4) \qquad 0\times x=B$$

Se ve que cualquier valor que pongamos en lugar de x en la espresion (4) no reduce ésta a una identidad, i por consiguiente la ecuacion (2) es *absurda*.

Luego *el valor infinito para la incógnita manifiesta que la ecuacion que lo ha producido es absurda.*

3.° Finalmente, si A i B son cero simultáneamente, la espresion (1) se convierte en

$$x=\frac{0}{0},$$

i aplicando a este símbolo lo dicho en la division, hallaremos que nos representa un número cualquiera, puesto que 0 multiplicado por cualquiera cantidad da por producto 0.

La espresion $\frac{0}{0}$ es pues *símbolo de indeterminacion.*

Veamos lo que este valor dice de la ecuacion (2) que en tal caso se convierte en

$$0\times x=0.$$

Es claro que esta ecuacion se verifica con cualquier valor de x, i es por consiguiente indeterminada.

De lo espuesto concluimos que la incógnita en una ecuacion de primer grado o tiene *un solo valor* finito, en cuyo caso la ecuacion es cierta; o tiene una infinidad, lo que se manifiesta por el valor $\frac{0}{0}$; o bien no tiene ninguno, circunstancia que se reconoce en el valor infinito a que llegamos en la resolucion de la ecuacion. En los dos primeros casos la ecuacion es cierta i absurda en el último.

Resolvamos la ecuacion

$$(5) \qquad 3x-2=2x+9+x,$$

i hallaremos que $\qquad 0\times x=11$

o bien $\qquad 0=11.$

La ecuacion (5) es como se ve absurda.

Resolviendo así mismo la ecuacion,

$$(6) \qquad 4x-3=4x-3$$

encontramos $\qquad 0=0,$

lo que nos enseña que la ecuacion (6) es indeterminada.

12. ECUACION DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCOGNITAS.—Sea la ecuacion con dos incógnitas que queremos resolver

$$(1) \qquad ax+by=c.$$

Considerando a y como cantidad conocida podemos resolver la ecuacion propuesta con respecto a x, i tendremos

$$x=\frac{c-by}{a};$$

pero como y es realmente incógnita, el valor de x es todavia desconocido. Para encontrarlo, es necesario dar a y *valores arbitrarios* i de este modo hallaremos, por cada valor dado a y, uno correspondiente para x. Si la ecuacion (1) tuviese mas de dos incógnitas, procederiamos de una manera análoga. Estas ecuaciones se llaman *indeterminadas*.

Para resolver una ecuacion indeterminada se halla el valor de

una cualquiera de sus incógnitas, i en seguida se dan a las demas valores arbitrarios: cada sistema de estos valores produce un valor para la incógnita despejada.

43. Ejemplos

1.° $x-2y=9$; $y=1$, $x=11$; $y=2$, $x=13$; $y=\frac{1}{2}$, $x=10$; &

2.° $2x-y+z=7$; $x=1$, $y=0$, $z=5$; $x=1$, $y=1$, $z=6$; &

3.° $3x-2y=11$ 4.° $3x-2z-y=29$

44. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCOGNITAS.—Propongámonos resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$(1) \qquad \begin{cases} ax+by=c \\ a'b+b'y=c' \end{cases}$$

Por resolver este sistema de ecuaciones se entiende hallar un valor para x i otro para y, tales que sustituidos en las ecuaciones (1) hagan que el sistema se verifique.

La cuestion se resolveria fácilmente si se pudiese conseguir que una de las dos letras x o y se encontrase sola en una ecuacion, porque entónces no habria mas que observar la regla dada en el (núm. 39). En efecto, los métodos que se emplean para resolver un sistema cualquiera de ecuaciones, tienen por objeto *eliminar* o hacer desaparecer sucesivamente las diferentes incógnitas hasta llegar a una sola ecuacion con una o mas incógnitas, que se resuelve segun las reglas conocidas.

ELIMINACION POR REDUCCION.—Multipliquemos por a' la primera de las ecuaciones (1) i por a la segunda, i hallaremos

$$aa'x+ba'y=ca'$$
$$aa'x+ab'y=ac'$$

Como estas ecuaciones tienen los términos en x con coeficientes iguales i del mismo signo, restándolas desaparecerán estos términos i la ecuacion que resulta tendrá la sola incógnita y,

$$ab'y-ba'y=ac'-ca'.$$

De aquí sacamos $\qquad (ab'-ba')\,y=ac'-ca',$

i finalmente $\qquad$ (2) $\qquad y=\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$

De la misma manera hallaremos el valor de x.

$$ab'x+bb'y=cb'$$
$$ba'x+bb'y=bc'$$
$$ab'x-ba'x=cb'-bc'$$
$$(ab'-ba')\,x=cb'-bc'$$

(3) $\qquad x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$

Los valores (2) i (3) de y i x cumplen con las ecuaciones (1).

Para eliminar una incógnita en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se hace que dicha incógnita tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones; i sumando o restando éstas, segun que los coeficientes mencionados tengan signos diferentes o iguales, desaparecerán por la reduccion los términos que contienen la incógnita que se queria eliminar, i quedará una sala ecuacion con la otra incógnita, cuyo valor se puede entónces determinar. De este modo se encuentran los valores de las incógnitas que resuelven las ecuaciones dadas.

15. Propongámonos resolver las ecuaciones siguientes:

(1) $\qquad \left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ 3x+y=18 \end{array}\right.$

Para encontrar el valor de x es necesario eliminar a y, pero como en el ejemplo propuesto y tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, con signo contrario, sumando estas ecuaciones hallaremos desde luego

$$3x+2x=18+4;$$

i de aquí (2) $x=\frac{22}{5}$

Multiplicando la primera ecuacion por 3, coeficiente de x en la segunda, i ésta por 2, coeficiente de x en aquella, haremos que los términos en x sean iguales; i como ademas tienen el mismo signo, restando las ecuaciones que resultan hallaremos

$$2y+3y=36-12;$$

de donde sacamos que (3) $y=\frac{24}{5}$

Poniendo los valores (2) i (3) en lugar de x e y en las ecuaciones (1) se convertirán éstas en identidades.

46. Ejemplos:

1.° $x+y=24$ $x=17$
$x-y=10$ $y=7$

2.° $x+4y=40$ $x=16$
$2x+3y=50$ $y=6$

3.° $4x+3y=25$
$7x-5y=13$

4.° $450x+325y=400$
$x+y=1$

47. ELIMINACION POR SUSTITUCION. — Volvamos a tomar las ecuaciones (1) del (núm. 44). Sacando de la primera el valor de x encontramos que

$$x=\frac{c-by}{a};$$

sustituyéndolo en lugar de x en la segunda ecuacion, hallamos una ecuacion con la sola incógnita y,

$$a'\frac{c-by}{a}+b'y=c';$$

i resolviendo esta ecuacion tendremos el valor de y.

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

Si en una cualquiera de las ecuaciones (1) citadas sustituimos en lugar de y el valor que acabamos de determinar, hallaremos el valor de x,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Estos valores de x e y, que naturalmente son los mismos encontrados en el (núm. 44), cumplen con las ecuaciones mencionadas, que quedan por consiguiente resueltas.

De modo que *para eliminar una incógnita en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, basta despejarla de una cualquiera de las ecuaciones i sustituirla en la otra, que queda así con una sola incógnita. Hallada ésta, se sustituye a su vez en cualquiera de las ecuaciones dadas, i se determina despues el valor de la otra incógnita, con lo cual se termina la resolucion del sistema propuesto.*

Resolvamos las ecuaciones del ejemplo 3.° del núm. anterior. Saquemos el valor de x de la primera ecuacion, sustituyámoslo en la segunda, i tendremos:

$$13=7\times\frac{25-3y}{4}-5y$$

Resolviendo esta ecuacion encontramos

$$y=3,$$

i sustituyendo este valor en la primera ecuacion propuesta nos resulta

$$4x+9=25;$$

de donde por fin sacamos que

$$x=4$$

Las ecuaciones dadas se verifican reemplazando a x e y por los números 4 i 3.

48. Para resolver un sistema de tres o mas ecuaciones con otras tantas incógnitas, procederemos como en el caso de dos ecuaciones. Efectivamente, ya empleemos el método de reduccion, ya el de sustitucion, siempre procuraremos llegar a una ecuacion con una sola incógnita que resolveremos fácilmente. La resolucion de las ecuaciones siguientes bastará para manifestarnos la marcha que debemos seguir.

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x-3y+5z=27 \\ 3x+6y-4z=2 \\ 5x+4y+2z=40 \end{array} \right.$$

Entre las dos primeras ecuaciones eliminaremos a x por el método de reduccion, i nos resultará esta otra

$$(2) \qquad 23z-21y=77.$$

Hagamos otro tanto con la primera i tercera ecuaciones, i hallaremos

$$(3) \qquad 21z-23y=25$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (2) i (3), como ya sabemos, encontramos los valores 7 i 4 de z e y que sustituidos en la primera ecuacion, nos dan

$$2x+23=27.$$

De aquí sacamos el valor de x que con los de z e y satisface el sistema propuesto; i así,

$$x=2,\ y=4 \text{ i } z=7.$$

Resulta pues que *para resolver* n *ecuaciones con* n *incógnitas se elimina una cualquiera de éstas entre la primera ecuacion por ejemplo i todas las otras, i se obtienen así* n—1 *ecuaciones con* n—1 *incógnitas; con estas* n—1 *ecuaciones se hace lo mismo que con las* n, *i se hallan entónces* n—2 *ecuaciones con* n—2 *incógnitas; i continuando del mismo modo, al cabo de* n—2 *eliminaciones, se encuentran dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyos valores se determinan como ya se sabe. Hallados éstos, se sustituyen en una de las 3 ecuaciones con 3 incógnitas i se tienen así los valores de 3 incógnitas; éstos se sustituyen a su vez en una de las 4 ecuaciones con 4 incógnitas i se encuentra el valor de la cuarta incógnita; i siguiendo la misma marcha se llega a sustituir en una de las ecuaciones propuestas los valores de* n—1 *incógnitas para determinar el de la última.*

49. Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.°
$$\begin{aligned} 2x-6y+3z&=5 \qquad & x&=10\\ x+2y-12z&=4 & y&=3\\ 8y+6z-3x&=0 & z&=1 \end{aligned}$$

2.°
$$\begin{aligned} 6x+3y-3z+u&=5 \qquad & x&=0\\ 3x+5y+2z-2u&=4 & y&=2\\ 5x-2y-2z+2u&=2 & z&=2\\ 2x+5y+3z-3u&=1 & u&=5 \end{aligned}$$

3.°
$$\begin{aligned} 4x-7y+6z&=10\\ 5x+2y&=33\\ 7x-3y&=23 \end{aligned}$$

50. Si el sistema de ecuaciones dado contiene mas incógnitas que ecuaciones, se procede en su resolucion segun la regla conocida (núm. 48); pero la ecuacion final a que se llega es indeterminada, i por consiguiente las incógnitas que entran en ella tienen una infinidad de valores (núm. 42); i como los de las demas incógnitas dependen evidentemente de los que se hallan en la resolucion de la última ecuacion, es claro que las ecuaciones propuestas son *indeterminadas*. El ejemplo que sigue basta para comprender lo que se acaba de decir.

$$x-\ y-2z=10$$
$$x+2y+2z=18$$

Eliminando a z hallamos que

$$x+y=14,$$

i de aquí

$$x=14-y.$$

Haciendo que y tome los valores arbitrarios 0, 1, 2, &, encontramos para x los valores 14, 13, 12, &, que sustituidos sucesivamente en la primera ecuacion dada, al mismo tiempo con los correspondientes de y, nos dan para z los valores 2, 1, 0, &.

51. Por el contrario, cuando en el sistema que se da hai mas ecuaciones que incógnitas, es necesario para resolverlo tomar igual número de ecuaciones al de incógnitas i prescindir de las ecuaciones restantes, en cuyo caso la cuestion se reduce a aplicar la regla dada en el (núm. 48). Así se determinan los valores de todas las incógnitas que entran en las ecuaciones propuestas; pero dichos valores pueden satisfacer o no a las ecuaciones que no se tomaron en cuenta para determinarlos: en el primer caso el sistema queda resuelto, en el segundo la resolucion es *imposible*. Esas ecuaciones que deben verificarse para que el sistema dado tenga solucion se llaman *ecuaciones de condicion*, i el sistema se dice que es *mas que determinado*.

Sean las ecuaciones que queremos resolver

$$x+y=50,$$
$$x-y=20,$$
$$xy=m.$$

Como hai dos incógnitas solamente, tomaremos las dos primeras ecuaciones para encontrar los valores de x e y, i tendremos que

$$x=35 \text{ e } y=15.$$

Para que el sistema tenga solucion es indispensable que m sea igual a 35×15.

52. DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.—De las ecuaciones

$$(1) \qquad \begin{cases} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c', \end{cases}$$

hemos sacado (núm. 44) que

$$(2) \qquad x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},$$

i que

$$(3) \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Estos valores los hemos deducido de las ecuaciones (1) suponiendo tácitamente que existia a lo ménos un valor de x i otro de y que verificaban el sistema. Examinemos ahora los valores que pueden resultar de las espresiones (2) i (3), i las relaciones respectivas entre ellos i las ecuaciones que los han producido.

1.° Si el denominador $ab'-ba'$ no es cero, los valores finitos de x e y cumplen con las ecuaciones (1).

2.° Si $ab'-ba'=0$ i $cb'-bc'$ tambien lo es, hallamos desde luego que

$$x=\frac{0}{0};$$

estas condiciones nos dan ademas

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \text{ i } \frac{c}{c'}=\frac{b}{b'},$$

de donde resulta

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'} \text{ o } ac'=ca';$$

de manera que el numerador del valor de y es tambien cero i por consiguiente

$$y=\frac{0}{0}.$$

Los valores de x e y son pues indeterminados, siempre que entre los coeficientes de las incógnitas i los términos constantes de las ecuaciones se verifique la relacion

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Veámos lo que manifiestan las ecuaciones (1) cuándo en ellas se introducen las condiciones que nos han producido los valores indeterminados de x e y. Dividiendo la primera ecuacion por b i la segunda por b' encontramos

$$(4) \qquad \frac{a}{b}x+y=\frac{c}{b} \text{ i } \frac{a'}{b'}x+y=\frac{c'}{b'};$$

ecuaciones idénticas puesto que $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ i $\frac{c}{b}=\frac{c}{b}$

Las dos ecuaciones propuestas equivalen en realidad a una sola con dos incógnitas, i son por lo tanto indeterminadas como los valores de x e y.

3.° Si $ab'-ba'=0$ sin serlo $cb'-bc'$ i tampoco por consiguiente $ac'-ca'$, los valores de x e y son de la forma

$$\frac{m}{0}$$

o infinitos.

Las ecuaciones (4) tienen los primeros miembros iguales i los segundos no lo son, como lo manifiesta la condicion de no ser cero $cb'-bc'$. Es entónces imposible que las dos ecuaciones dadas se satisfagan con los mismos valores de x e y, i se las llama por eso *incompatibles*.

De modo que si se verifica únicamente que $ab'-ba'=0$ o

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$

las ecuaciones son incompatibles i los valores de las incógnitas infinitos.

Resolviendo los dos sistemas de ecuaciones que siguen se verá que el primero es indeterminado, i el segundo ofrecerá un ejemplo de dos ecuaciones incompatibles, circunstancias que se advierten a la vista de las ecuaciones.

1.° $\quad 4x-2y=12,\quad x-\frac{1}{2}y=3.$ $\qquad$ 2.° $\quad 2y-3x=15,\quad \frac{2}{3}y-x=28.$

53. En el 2.° caso de los considerados en el número anterior hemos admitido que b i b' no son nulas, pero sucediendo esto llegamos a otras conclusiones. Supongamos en efecto que $b=0$ i $b'=0$, $ab'-ba'$ i $cb'-bc'$ serán tambien nulas, mas no puede deducirse de aquí que lo sea $ac'-ca'$; de modo que las espresiones (2) i (3) del (núm. 52) se convierten en estas otras

$$x=\frac{0}{0} \text{ e } y=\frac{ac'-ca'}{0},$$

i las ecuaciones correspondientes toman estas formas.

$$(1) \qquad ax=c \text{ i } a'x=c'.$$

De aquí sacamos para x los valores

$$x=\frac{c}{a} \text{ i } x=\frac{c'}{a'},$$

los cuales no son iguales a no ser que se verifique la condicion $ac'-ca'=0$. Si esto sucede, el valor de y es indeterminado, lo cual es evidente puesto que y no entra en las ecuaciones i puede por consiguiente tener un valor cualquiera.

En cuanto a x, que se presenta bajo la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, tiene, como acabamos de verlo, un valor determinado $\frac{c}{a}$.

Pero si $ac'-ca'$ no es cero, el valor de y es infinito, los dos valores de x no pueden ser iguales, i las ecuaciones (1) son incompatibles.

CAPITULO IV.

De los problemas.

54.—En la resolucion de un problema nos proponemos hallar uno o mas números que cumplan con ciertas condiciones espresadas en su enunciado, de modo que, dado el número que se dice resuelve la cuestion, es fácil comprobarlo averiguando si llena las condiciones exijidas. Segun esto, es evidente la estrecha analojía que hai entre la incógnita de una ecuacion i la de un problema: ambas son números desconocidos que es preciso determinar con arreglo a condiciones dadas por la ecuacion misma o por el enunciado del problema. Pero lo que establece una diferencia notable entre dichas incógnitas, es el modo como se llega a determinarlas; porque la resolucion de las ecuaciones, como lo sabemos, está sujeta a reglas fijas i sencillas, al paso que la de los problemas no lo está, i pide en muchos casos esfuerzos de intelijencia para conseguirla. De aquí la importancia de reducir la resolucion de los problemas a la de las ecuaciones.

La resolucion de un problema, hecha segun lo que acabamos de esponer, ofrece como se ve dos dificultades: 1.ª espresar el enunciado del problema por medio de una o mas ecuaciones, segun sean sus diversas circunstancias, a lo que se llama *planteacion;* i 2.ª resolver las ecuaciones que resultan de esta planteacion. Nos ocuparemos ahora del modo de plantear un problema, puesto que la resolucion de las ecuaciones nos es ya conocida.

Si se nos propusiese el problema de hallar un número que multiplicado por 4 nos diese un producto que disminuido en 6 nos produjese un resultado 54, i se nos asegurase ademas que el valor del número buscado era 15, podriamos averiguar fácilmente si este número era o no exacto examinando si cumplia con las condiciones exijidas. Así diriamos: como el producto del número 15 por 4 disminuido en 6 debe producirnos 54, multipliquemos a 15 por 4, del producto 60 restemos 6 i la diferencia debe ser 54, si el número dado 15 cumple con el problema. La diferencia es efectivamente 54, i por lo tanto 15 resuelve el problema.

Comprendido perfectamente el enunciado de un problema, distinguidas con claridad las diversas relaciones de la incógnita o incógnitas con los datos, se representan éstos por las primeras letras del alfabeto i aquellas por las últimas. Sirviéndonos en seguida de los signos aljebraicos, i como si tratasemos de comprobar valores conocidos de las incógnitas, como lo hemos hecho en el problema precedente, procedemos a escribir las diversas relaciones que existen entre los datos i las incógnitas del problema. Hecho esto, el enunciado del problema queda escrito por medio de ecuaciones, traducido al lenguaje aljebraico, i el problema planteado.

55. La aplicacion de estos preceptos a la resolucion de los siguientes problemas hará que los comprendamos mejor i notemos su importancia.

Problema primero.—a *es la edad de un padre*, b *la de su hijo; se quiere saber dentro de cuánto tiempo la edad del padre será doble de la del hijo.*

La edad actual del padre es a.

La edad actual del hijo es b.

La incógnita del problema, que es el tiempo que debe trascurrir para que la edad del padre sea doble de la del hijo, la llamaremos x. Trascurrido el tiempo x,

La edad del padre es $a+x$,

La edad del hijo es $b+x$.

Como segun la condicion del problema, pasado el tiempo x, la edad del padre ha de ser doble de la del hijo, síguese que $a+x$ es doble de $b+x$. Multiplicando entónces por 2 a $b+x$ hallaremos un producto igual a $a+x$, lo que nos da la ecuacion

$$2\ (b+x)=a+x.$$

El problema está pues planteado. La resolucion la haremos conforme a la regla conocida (núm. 39), i encontraremos así que

$$(1) \qquad x=a-2b.$$

Esta espresion del valor de x es una fórmula que sirve para resolver todos los problemas análogos al presente, poniendo en lugar de a i b los números que se den. Si el padre tiene 50 años i el hijo 20, $a=50$ i $b=20$, de donde resulta $x=10$. Este número 10 que verifica la ecuacion

$$2\,(20+x)=50+x,$$

cumple tambien con el problema, puesto que, al cabo de los 10 años, el padre tendria 60 años i el hijo 30.

PROBLEMA SEGUNDO.—*Dos comerciantes que han puesto en compañia 10000 pesos, ganan 3250 pesos; la ganancia del primero escede a la del segundo en 650 pesos, i se quiere saber cuánto ha ganado cada uno i cuáles son las puestas.*

Aun cuando a primera vista aparecen dos incógnitas en este problema, en realidad hai una sola, porque conocida la ganancia del segundo comerciante, la del primero se obtiene agregando a aquella el esceso 650. Llamemos x la ganancia del segundo comerciante, la del primero será $x+650$; i como la suma de las ganancias de los dos debe producir la ganancia total 3250, tendremos que

$$x+(x+650)=3250;\ \text{de donde}\ x=1300.$$

El segundo comerciante ha ganado 1300 pesos, i al primero, que ha ganado 650 pesos mas, le corresponden 1950.

Conocidas las ganancias correspondientes a cada socio, es fácil determinar lo que cada uno puso.

Fijándonos en el problema que acabamos de resolver, veremos que se puede enunciar de una manera jeneral como sigue:

Dadas la suma i la diferencia dos números determinar éstos.

Sea s la suma i d la diferencia de dos números. Si llamamos x el menor, $x+d$ es el mayor, de donde resulta

$$x+x+d=s.$$

Luego el menor es

$$x=\frac{s-d}{2},$$

i el mayor

$$x+d=\frac{s+d}{2}.$$

Aplicando estas fórmulas al problema de arriba se encuentran los mismos valores para las incógnitas.

Problema tercero.— *Se quiere dividir el número 44 en dos partes tales que la primera aumentada en 5, guarde con la segunda aumentada en 7, la misma razon que los números 4 i 3.*

Si la primera parte la representamos por x, la segunda será $44-x$; la primera aumentada en 5 será $x+5$, i la segunda aumentada en 7, $(44-x)+7$ o $51-x$; i como la razon entre estas dos sumas debe ser igual a la de los números 4 i 3, tendremos

$$\frac{x+5}{51-x}=\frac{4}{3}.$$

Para resolver esta ecuacion, segun la regla del (núm. 39), es preciso quitar los denominadores multiplicando los dos miembros por el producto de los denominadores; pero como el denominador del primer miembro contiene la incógnita, en virtud de lo manifestado en el (núm. 36), la ecuacion que resulta no es equivalente a la primera, pues admite diversas soluciones. A este respecto observaremos solamente que resolviendo la ecuacion que queda despues de haber hecho desaparecer los denominadores, se encuentran las soluciones que nos importa conocer, despreciando otras ordinariamente infinitas i que por lo tanto no hacen al caso. Resolviendo pues la ecuacion de arriba hallamos

$$x=27.$$

La primera parte es entónces 27, i por consiguiente la segunda es (44—27) o 17. Es fácil comprobar que estos números cumplen con todas las condiciones del problema.

56. Los problemas que hemos resuelto en el número anterior, nos han conducido a una ecuacion de primer grado con una sola incógnita. Los enunciados de los que a continuacion ponemos para ejercicio del lector son de la misma clase.

I. *Dividir el número* a *en tres partes proporcionales a los números* p, p′ *i* p″.

II. *¿Cuál es el interes de un capital* a, *en* n *años, al* t *por* 100 *anual?*

III. *De dos documentos, uno de* 6000 *pesos pagadero en* 25 *meses i el otro de* 27000 *pesos pagadero en* 4 *meses, se ha rebajado la misma cantidad al descontarlos, i se quiere saber el tanto por* 100 *del descuento.*

IV. *Tenemos agua del mar que contiene un quilógramo de sal por cada* 32 *quilógramos de agua, i se desea averiguar cuánta agua dulce es necesario agregar a dichos* 32 *quilógramos para obtener una mezcla que contenga* 125 *gramos de sal en cada* 32 *quilógramos.*

V. *Una persona reparte* 50 *pesos entre* 20 *pobres, de los cuales uno es niño i los demas son hombres o mujeres; ella ha dado* 3 *pesos a cada hombre,* 2 *a cada mujer i uno al niño. Se pregunta cuántos hombres i mujeres habia.*

VI. *Se tienen* n *hectólitros de trigo a* a *pesos el hectólitro, i se quiere saber con cuántos hectólitros de trigo de a* b *pesos el hectólitro deben mezclarse para poder vender a* c *el hectólitro de la mezcla.*

57. El problema que se nos proponga puede dar oríjen a una ecuacion con mas de una incógnita, en cuyo caso la ecuacion es indeterminada i se resuelve siguiendo la regla conocida (núm. 42). Si, como lo suponemos, el problema ha sido bien traducido, será tambien *indeterminado.*

Se quiere pagar la suma de 51 *pesos con monedas de a* 5 *pesos i monedas de a* 2 *¿cuántas monedas de cada clase se necesitan?*

Llamemos x el número de monedas de a 5 pesos, e y el de a 2; $5x+2y$ será entónces la cantidad formada, i como ésta debe ser 51 pesos, tendremos la ecuacion

$$5x+2y=51.$$

Sacando el valor de y hallamos

$$y=\frac{51-5x}{2}.$$

Haciendo $x=1$ encontramos que $y=23$
$x=3$ $y=18$
$x=5$ $y=13$

El pago puede hacerse con una moneda de a 5 pesos i 23 de a 2, o con 3 de a 5 i 18 de a 2, etc. Observemos sin embargo que en algunos problemas indeterminados no podemos admitir como soluciones suyas las infinitas que resultan de la ecuacion, porque la naturaleza del problema exije a veces cierta clase de valores para las incógnitas. Así, en el problema que acabamos de resolver, debemos desechar las soluciones fraccionarias.

58. Hé aquí algunos problemas indeterminados que podemos resolver.

I. *Con* 125 *pesos se desea comprar té de a* 3 *pesos el quilógramo i de a* 7 *pesos ¿cuántos quilógramos se pueden comprar de cada clase?*

II. *Un padre de familia tiene* 24 *hijos. El número de hombres es divisible por* 7 *i el de mujeres por* 3. *Se trata de saber cuál es el número de hombres i cuál el de mujeres.*

III. a *i* b *son los precios a que se vende el litro de dos clases de* *vino; i se quiere saber cuántos litros de cada clase deben tomarse para formar una mezcla en que el valor del litro sea* c.

59. Hasta aquí los problemas que hemos resuelto nos han dado oríjen a una sola ecuacion con una o mas incógnitas; pero el número de éstas i las diversas condiciones que las ligan a los datos de la cuestion pueden ser tales que la traduccion del problema al lenguaje aljebraico dé lugar a varias ecuaciones con varias incógnitas. Consideraremos sucesivamente los tres casos de ser el número de incógnitas igual, mayor o menor que el de ecuaciones. Los problemas que se hallan en estos casos son *determinados*, *indeterminados* o *mas que determinados*, i su planteacion i resolucion se hacen segun las reglas establecidas.

PROBLEMAS DETERMINADOS.—*Un mercader tiene vinos de dos clases:* 8 *litros de la primera calidad i* 10 *de la segunda, valen* 1 *peso* 80 *centavos; i* 3 *litros de la primera calidad, mas* 7 *de la segunda, importan* 87 *centavos. Se pregunta cuál es el precio del litro de vino de cada especie.*

Representemos por x el precio del litro de vino de la primera especie i por y el de la segunda; i tendremos que los 8 litros de la segunda costarán $8x+10y$, i como este valor es 180 centavos, resultará

$$8x+10y=180.$$

Del mismo modo, $$3x+7y=87.$$

La resolucion de estos ecuaciones (núms. 44 i 47) nos da

$$x=15 \text{ e } y=6.$$

Resolvamos algunos otros problemas.

I. *Resolver el problema* 3.° *del* núm. 58 *agregando la condicion de que la mezcla debe contener* m *litros.*

II. *Un hombre se encarga de trasportar vasos de tres tamaños diferentes, i conviene en pagar por cada vaso que rompa lo que hubiera* *recibido si lo hubiese entregado en buen estado. Se le dan 3 vasos grandes, 5 medianos i 9 pequeños, i se sabe que en el camino ha roto todos los vasos de uno de los tres tamaños. Si los vasos rotos son los grandes o los pequeños, el conductor ganará 10 centavos; pero si son los medianos, solo ganará 8 centavos. Se pregunta cuánto se le paga por un vaso de cada especie que entregue en buen estado.*

III. *Una persona ha dividido su capital en tres partes que pone a interes: la primera al 5 por 100, la segunda al 4 por 100 i la tercera al 3 por 100. De este modo se proporciona una renta de 4000 pesos, como si todo su capital hubiera sido colocado al 4 por 100. Se sabe ademas que la parte puesta al 5 por 100 produce anualmente 600 pesos mas que la que está colocada al 3 por 100. Se quiere saber cuál es el capital entero i cuáles son las tres partes.*

Problemas indeterminados.—Daremos los enunciados de algunos problemas de esta clase.

I. *Treinta individuos han recibido 50 pesos, a razon de 3 pesos por cada hombre, de 2 por cada mujer i de 1 por cada niño. Se pregunta cuántos hombres, mujeres i niños habia.*

II. *Preguntado un pastor por el número de sus ovejas, respondió: Contándolas de 5 en 5, restan 2; si se cuentan de 11 en 11, sobran 4; pero si se toman de 13 en 13 quedan 11. Se pregunta cuántas ovejas habia.*

III. *En un número compuesto de cuatro cifras se verifica que la primera, contando por la izquierda, agregada a la última da 8 por suma; la primera i tercera cifras dan una suma que es los $\frac{3}{2}$ de la de las otras dos; i, finalmente, la suma de las cuatro cifras es 15. ¿Cuál es el número que goza de estas propiedades?*

Problemas mas que determinados.—Si recordamos lo que hemos dicho acerca de los sistemas de ecuaciones mas que determinadas (núm. 51), comprenderemos que un problema mas que determinado es jeneralmente *imposible de resolver.* En efecto, para que un problema de esta clase tenga solucion, es indispensable que entre los datos haya relaciones de tal naturaleza que se verifiquen las ecuaciones que hemos llamado de condicion con los valores de las incógnitas que se deducen de las ecuaciones que se emplean en la resolucion del problema.

I. *Hallar dos números en los que se verifique que el doble del primero disminuido en 20 produzca el segundo, que el doble de éste aumentado en el primero dé una suma 100, i que sumados den el número 72.*

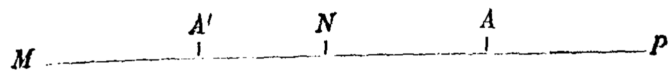
CAPITULO V.

De las cantidades negativas i de la discusion de los problemas de primer grado.

60. Hasta aquí solo hemos considerado en las cantidades el *valor absoluto*, esto es, el valor numérico, aritmético, independiente del signo; i los que hemos llamado términos positivos o negativos son simplemente aquellos que en una espresion están precedidos de alguno de los signos $+$ o $-$. Estos signos en tal caso no sirven mas que para indicar la adicion o sustraccion.

Pero las cantidades pueden ser miradas bajo otro punto de vista que el de su magnitud: podemos considerar en ellas su manera de ser, es decir, el poder de aumentar o de disminuir a una cantidad. Si una letra cualquiera nos representa una cantidad, nada habrá que nos indique su estado o facultad de aumentar o disminuir a otra cantidad; pero los mismos signos que que nos han servido para indicar la adicion o sustraccion, como lo veremos, pueden tambien emplearse para espresar la manera de ser de una cantidad. Con algunos ejemplos podremos comprender bien este nuevo aspecto bajo el cual estamos ahora considerando las cantidades.

Si la línea recta $M\ N$ es enjendrada por el movimiento de un punto que partiendo de M se dirije hacia P, es claro que al trasladarse dicho



punto de N a A la distancia de $M\ N$ aumenta en la cantidad $N\ A$; pero si, por el contrario, el punto retrocede hasta A', la distancia $M\ N$ disminuye en la cantidad $N\ A'$. Se ve pues que las cantidades contadas en el sentido $N\ P$ o de izquierda a derecha producen un aumento en la cantidad $M\ N$, i que las que se toman en el sentido opuesto causan una disminucion. Si los valores absolutos de las cantidades $N\ A$ i $N\ A'$ fueran iguales, debian éstas ser representadas por la misma letra, i no sabriamos distinguir los efectos opuestos que ellas producirian sobre la cantidad $M\ N$. Los signos que usamos para indicar la adiccion i sustraccion pueden servirnos i nos sirven en efecto para lograr este fin, considerando afectadas del signo $+$ las cantidades que tienen el poder de aumentar a otra i del $-$ aquellas que son capaces de disminuirla. De aquí la division de las cantidades en *positivas* i *negativas*.

Muchos son los ejemplos que, como el anterior, nos ofrecen ocasion de distinguir estas dos clases de cantidades. En efecto, las ganancias i pérdidas de un comerciante en sus negocios, lo que posee i lo que debe un individuo, lo que se adelanta i lo que se atrasa un reloj, etc., son otros tantos casos en que las ganancias, los haberes, lo que se adelanta el reloj, etc., son cantidades positivas con respecto al estado de los negocios del comerciante, a la fortuna del individuo, a la hora verdadera del reloj, etc.; i, por el contrario, son negativas las otras cantidades que desempeñan un oficio opuesto en cada caso.

61. Pudiera creerse que un número aislado i precedido del signo $-$, tal como -4, no tiene significacion alguna; pero manifestaremos que en ciertos problemas un resultado de esta naturaleza es una solucion esplicable, en otros nos revela un error en el enunciado o en la planteacion, i puede indicarnos tambien la imposibilidad de la resolucion. Estos usos que se hacen de las cantidades negativas i algunos que daremos a conocer mas adelante, nos prueban la importancia de este jénero de cantidades en el Aljebra.

Un acontecimiento *A* ha tenido lugar 200 años ántes que otro *B* verificado 500 años despues de J. C., i se quiere saber la fecha del acontecimiento *A*. Es evidente que restando de la fecha del suceso *B* el número de años en que se anticipó el acontecimiento *A* al *B* hallaremos la fecha que buscamos, i 300 años despues de J. C. se verificó por consiguiente el suceso *A*. Pero si éste hubiera tenido lugar 800 años ántes que el *B*, la diferencia 500—800 seria el número negativo —300. Este resultado es completamente aceptable, porque el acontecimiento *A* se verifica 300 años ántes de J. C. Hai pues una correspondencia exacta entre el resultado negativo i las fechas ántes de J. C.

Los problemas sobre temperaturas, latitudes, etc., se hallan en el mismo caso que el anterior: en todos ellos el resultado negativo, léjos de presentarnos un símbolo inesplicable, nos da una verdadera solucion del problema.

62. Propongámonos determinar un número que sumado con 6 nos dé por resultado 4. Llamando x el número desconocido encontramos que $x+6=4$, de donde resulta $x=-2$. El problema tal como lo hemos propuesto no tiene evidentemente solucion, porque es imposible obtener el número 4 agregando al número mayor 6 un número cualquiera; se ve, por el contrario, que es necesario quitar 2 a 6 para hallar el número 4. El resultado —2 puede servirnos entónces para rectificar el error contenido en el enunciado del problema, i tomado positivamente corresponde al problema rectificado. Este debe enunciarse así: hallar un número que restado de 6 nos produzca 4. El número que cumple con el problema es 2.

En el problema que precede hemos podido conocer el error del enunciado sin necesidad de que nos lo manifestase el resuldo negativo, a causa de su sencillez; pero en la jeneralidad de los problemas en que hai complicacion en las relaciones de la incógnita con los datos, es mui difícil i aun imposible descubrir las contradicciones o errores que esas relaciones envuelven. El resultado negativo en algunos de esos casos pone de manifiesto el error del enunciado, i, como luego lo veremos, nos da ademas el medio fácil de correjirlo.

68. Lo espuesto hasta aquí sobre las cantidades negativas basta para dar idea del modo como debemos considerarlas i de la importancia que tienen en la resolucion de ciertos problemas. Agreguemos tambien que el uso de las cantidades negativas puede en algunos casos hacer que una fórmula sea aplicable a cuestiones diferentes, con lo cual se alcanza mayor jeneralidad en los cálculos.

En todas las operaciones aljebraicas cuyas reglas hemos dado a conocer hasta el presente, hemos admitido tácitamente que las espresiones dadas eran positivas; pero, conocidos ahora los estados positivo i negativo de las cantidades i la influencia que tienen en la resolucion de los problemas, necesitamos operar con las cantidades negativas i positivas indistintamente, a fin de dar al cálculo aljebraico toda su jeneralidad i aprovecharnos de sus ventajas.

I. ADICION.—Para indicar la adicion o sustraccion de dos cantidades encerraremos cada una de éstas en un paréntesis con su signo correspondiente, i colocaremos despues entre ellas el signo que sirve para espresar la operacion de que se trata. Si queremos sumar las espresiones $+a$ i $-b$, indicaremos la operacion de este modo:

$$(+a) + (-b).$$

No haremos mas que indicar los diferentes casos que pueden presentarse en la adicion.

$$(+a)+(+b)=\ a+b$$
$$(+a)+(-b)=\ a-b$$
$$(-a)+(-b)=-a-b$$
$$(-a)+(+b)=-a+b$$

a i b pueden ser monomios o polinomios que se convertirán en números aritméticos cualesquiera reemplazando las letras que entren en ellos por valores numéricos. La regla dada (núm. 8) es pues aplicable a toda clase de espresiones sin restriccion de ningun jénero.

II. SUSTRACCION.—Teniendo presente la definicion de esta operacion i en virtud de lo que acabamos de ver en la adicion, se llega a los siguientes resultados:

$$(+a)-(+b)=\ a-b$$
$$(+a)-(-b)=\ a+b$$
$$(-a)-(-b)=-a+b$$
$$(-a)-(+b)=-a-b$$

Vemos que la regla dada (núm. 9) es jeneral.

La suma i la resta de dos espresiones cuando en éstas se ha considerado el signo se llaman *suma aljebraica* i *diferencia aljebraica*. La suma aljebraica de dos números, por ejemplo, puede ser menor que uno de ellos i aun negativa, i la diferencia puede ser mayor que el minuendo.

III. MULTIPLICACION.—Los factores se han considerado en aritmética como positivos enteros o fraccionarios, i el producto como compuesto del multiplicando de la misma manera que el multiplicador se compone con la unidad. Así es que la multiplicacion de $+a$ por $+b$ no ofrece dificultad, i el producto es $+ab$ o simplemente ab. Pero como en áljebra los factores pueden ser negativos, es necesario tomar el multiplicador en su sentido jeneral, considerando, a mas de su magnitud, su signo. De modo que si cuando el multiplicador es positivo i entero, el multiplicando debe tomarse como sumando tantas veces como unidades tiene el multiplicador para obtener el producto, resulta que el multiplicando debe restarse el mismo número de veces cuando el multiplicador sea negativo. Por lo tanto,

$$(+4)\times(-3)=-4-4-4=-12;$$

i $$(+a)\times(-b)=-ab.$$

Con lo espuesto podemos escribir

$$\begin{aligned}(+a)\times(+b)&=\ \ ab\\(-a)\times(+b)&=-ab\\(+a)\times(-b)&=-ab\\(-a)\times(-b)&=\ \ ab\end{aligned}$$

Concluimos por consiguiente que el producto de dos cantidades es positivo o negativo, segun que dichas cantidades tengan signos iguales o diferentes. La regla de los signos (núm. 13) es una consecuencia de la presente.

Por ejemplo:

$$4abc^2\times-3bc=-12ab^2c^3;\ -5acd\times4a^2b=-20a^3bcd;$$
$$-a^2b^2c\times-\tfrac{1}{2}ac^3=+\tfrac{1}{2}a^3bc^4.$$

IV. DIVISION.—Si por cociente de una division entendemos la espresion que multiplicada por el divisor produce el dividendo, en virtud de lo que acabamos de ver, tendremos que

$$\frac{+20}{+4}=5;\ \frac{+20}{-4}=-5;\ \frac{-20}{+4}=-5;\ \frac{-20}{-4}=5.$$

De modo que el cociente de dos cantidades es positivo o negativo, segun que estas cantidades tienen signos iguales o diferentes.

Por ejemplo:

$$\frac{+24a^2bc}{-8a^2c}=-3b;\ \frac{-21ab^2cd^3}{3bcd^2}=-7abd;\ \frac{-4a^5b^2d}{-a^3b^2}=4a^2d.$$

Observemos que en el cociente a^{m-n} de $\frac{a^m}{a^n}$, como lo indicamos en el (núm. 19), puede suceder que $m<n$, en cuyo caso la diferencia $m-n$ es negativa. Llamemos p la diferencia entre n i m i tendremos

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=a^{-p}.$$

Tratemos de averiguar la interpretacion que debemos dar a la espresion a^{-p}, esto es, a una cantidad afectada de esponente negativo. Como $n=m+p$ resulta que

$$\frac{a^m}{a^{m+p}}=\frac{a^m}{a^m\times a^p}=\frac{1}{a^p}=a^{-p}.$$

Vemos pues que *una cantidad afectada de esponente negativo proviene de la division de dos potencias de la misma base en las que el esponente del dividendo es menor que el del divisor, i equivale a una fraccion cuyo numerador es uno i cuyo denominador es la cantidad con su esponente positivo.*

Así, la espresion $4\,a^{-2}b$, por ser $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$, equivale a esta otra $\frac{4b}{a^2}$, i la fraccion $\frac{4a^2b^{-3}}{cba^{-1}}$ es igual a esta otra $\frac{4a^3}{cb^4}$.

Una cantidad pasa del numerador al denominador o al contrario con solo cambiar el signo a su esponente.

V. POTENCIAS I RAICES.—La base de una potencia puede ser positiva o negativa, i, segun lo que hemos visto en la multiplicacion, si el esponente es un número par la potencia estará afectada del signo $+$; pero si el esponente es impar la potencia será positiva cuando la base lo sea, i será negativa en el caso contrario. Por ejemplo.

$$(+a)^4=a^4 \text{ i } (-a)^4=a^4, \text{ o bien } (+2)^2=4 \text{ i } (-2)^2=4.$$

$$(+2)^3=8 \text{ i } (-2)^3=-8.$$

Resulta de aquí que dada una potencia cuya raiz par queremos encontrar, no sabremos en jeneral que signo darle, puesto que, como lo vemos en los ejemplos anteriores, ya sea la raiz positiva, ya sea negativa, la potencia es siempre positiva. En esta incertidumbre, es necesario afectar la raiz del doble signo $\pm$, que se lee *mas* o *ménos*. Así,

$$\sqrt{4}=\pm 2, \quad \sqrt[4]{16}=\pm 2, \quad \sqrt{a^2}=\pm a.$$

Observemos que no es posible intentar estraer la raiz par de una cantidad negativa, porque esa raiz, positiva o negativa, elevada a un esponente par no puede producir una cantidad negativa. La raiz par de una cantidad negativa es lo que se llama *cantidad imajinaria:*

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt[4]{-16}, \quad \sqrt[2m]{-a} \text{ son cantidades imajinarias.}$$

Si queremos estraer la raiz de un grado impar de una cantidad, no tendremos duda acerca del signo que le correspo e, porque si la potencia es positiva la raiz lo será tambien i vice-versa. Así,

$$\sqrt[3]{27}=3; \quad \sqrt[3]{-8}=-2.$$

64. DISCUSION DE LOS PROBLEMAS DE PRIMER GRA-

DO.— Ya conocemos el modo como se juzga de si una ecuacion es cierta o absurda, de si tiene una solucion o admite una infinidad, i tambien hemos averiguado esto mismo respecto de un sistema de ecuaciones. Ahora nos proponemos examinar estas diversas circunstancias en un problema. Como la resolucion de un problema se consigue traduciendo al lenguaje aljebraico el enunciado i resolviendo la ecuacion o ecuaciones a que esa traduccion da lugar, parece que la discusion de un problema debiera limitarse únicamente a la de las ecuaciones que este orijina; pero el lenguaje aljebraico no es un verdadero idioma, i por lo tanto no es posible trasladar a él todas las condiciones que constituyen un problema; resultando de aquí que entre las soluciones del problema i las de las ecuaciones no hai una correspondencia exacta. Por esta razon es siempre necesario atender a la naturaleza del problema, a fin de no admitir como solucion suya la que solo es de la ecuacion, traduccion infiel del enunciado del problema. El problema resuelto en el (núm. 57) nos presenta un caso de esta naturaleza.

Pero cuando todas las condiciones de un problema han sido traducidas al lenguaje aljebraico, como sucede en los del (núm. 56), el valor positivo de la incógnita satisface la ecuacion i el problema.

63. INTERPRETACION DE LOS VALORES NEGATIVOS EN LA RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS. — 1.° Como lo hemos manifestado anteriormente (núm. 61), un valor negativo para la incógnita en cierta clase de problemas es una solucion esplicable.

2.° Si en la formula (1) del problema primero (núm. 55) hacemos $a=50$ i $b=28$, encontramos que $x=-6$. La ecuacion que resulta de estas suposiciones es

$$2(28+x)=50+x,$$

i el valor -6 puesto en lugar de x la convierte en una identidad.

Pero si el valor -6 satiface la ecuacion a que da lugar el problema, éste no admite la solucion negativa. En efecto, la incógnita del problema es el número de años que debe trascurrir para que la edad del padre, en la actualidad 50 años, sea doble de la del hijo, que actualmente es 28 años. Se ve pues que el valor de la incógnita debe ser necesariamente positivo; i como el resultado negativo ha provenido de una ecuacion que es la fiel traduccion al lenguaje aljebraico del enunciado del problema, debemos concluir que éste contiene alguna condicion imposible de llenar. Veamos como se puede rectificar el error del enunciado.

Si en vez de la espresion final $x=-6$ a que llegamos en la resolucion de la ecuacion de arriba, hallásemos $-x=-6$ o lo que es lo mismo $x=6$, no tendriamos dificultad ninguna. En tal caso, la ecuacion de arriba sufrirá el mismo cambio que la $x=-6$, esto es, el signo de x será contrario al que tiene en cada término, i se convertirá por consiguiente en esta otra:

$$2(28+x)=50+x;$$

de donde resulta $\qquad x=6.$

La ecuacion que nos da este valor no es la traduccion del problema propuesto primitivamente; pero de ella se puede deducir el enunciado del problema modificado, traduciéndola al lenguaje comun, ateniéndonos en la traduccion al enunciado orijinal, i dando a las cantidades que han combiado de signo una acepcion opuesta a la que tenian ántes de la modificacion. Observando estas prescripciones hallamos este enunciado:

Un padre tiene 50 años i su hijo 28. ¿Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué doble de la del hijo?

Basta el ejemplo anterior para ver que el valor negativo de la incógnita de un problema manifiesta que, tal como ha sido enunciado, dicho problema es imposible de resolver; que el error del enunciado se puede correjir traduciendo al lenguaje comun la ecuacion que resulta de cambiar los signos de los términos que contienen la incógnita en la ecuacion primitiva; i que, finalmente, el mismo valor negativo tomado positivamente satiface al nuevo problema.

3.° Por la naturaleza de ciertos problemas sucede que el valor negativo indica a veces imposibilidad absoluta de resolverlos: basta que la incógnita no admita un valor negativo ni que sea susceptible de tomarse en una acepcion contraria a la que el problema le da, para que el valor negativo de ella revele lo absurdo del problema.

La distancia entre dos ciudades es un número de quilómetros tal que su quíntuplo aumentado en 3000 *equivale al cuadruplo disminuido en* 1000. *Se pregunta cuál es la distancia entre las dos ciudades.*

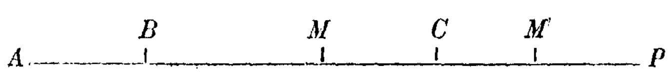
Llamemos x la distancia i tendremos

$$5x+3000=4x-1000;$$

de donde sacamos $$x=-4000.$$

Como la distancia entre dos puntos es una cantidad esencialmente positiva i que por otra parte no admite una acepcion diferente de la que naturalmente tiene, resulta que el problema propuesto es absurdo.

4.° *Dos móviles* A *i* B *se dirijen sobre la recta que los une hácia un punto* C, *recorriendo el primero* 6 *metros por minuto i el segundo* 4 *metros. La distancia* AC *es de* 80 *metros i la* BC *de* 50. *Se pregunta en qué punto de la recta se encontrarán los dos móviles.*



Supongamos que los móviles se encuentran en un punto M entre B i C, i llamemos x la distancia $C\,M$. El móvil A, al llegar al punto M de encuentro, ha recorrido un camino $80-x$, i el móvil B otro representado por $50-x$; i como ambos caminos son recorridos en el mismo tiempo, resulta que

$$\frac{80-x}{6}=\frac{50-x}{4}.\text{ De aquí se deduce que } x=-10.$$

El enunciado del problema nos manifiesta que hai precisamente solucion, puesto que el móvil A marcha con mayor velocidad que el móvil B; de manera que el valor negativo que encontramos para la incógnita no puede indicar error de ninguna clase en dicho enunciado. Efectivamente, el valor negativo nace de la suposicion que hemos hecho acerca de la situacion del punto de encuentro con el fin de plantear el problema. Nada habia que nos dijese que dicho punto estaba colocado entre B i C i no entre C i P, como sucede en realidad. El punto de encuentro se halla pues en M', a 10 metros del punto C.

El problema que precede nos hace ver que el valor negativo de la incógnita puede, en algunos casos, provenir de una suposicion falsa hecha para plantear el problema.

66. La discusion del problema siguiente acabará de enseñarnos la interpretacion de las cantidades negativas i sus usos, i nos hará ver tambien lo que significan en la resolucion de los problemas los símbolos $\frac{m}{0}$ i $\frac{0}{0}$, que en las ecuaciones nos han servido para manifestar lo absurdo o indeterminado de ellas.

Dos correos B *i* C (nos referimos a la figura del problema que antecede) *marchan sobre la línea* A P *en el sentido de izquierda a derecha; el primero lleva una velocidad de* v *quilómetros por hora, i el segundo una de* v' *quilómetros por hora. Se sabe que la distancia que los separa es de* d *quilómetros, i se desea averiguar a qué distancia del punto* B *se encontrarán.*

Si representamos por x esta distancia, hallaremos que

$$\frac{x-d}{v'}=\frac{x}{v};\text{ de donde resulta } x=\frac{dv}{v-v'}.$$

1.° Si, como lo suponemos, d, v i v' son cantidades positivas i ademas $v>v'$, el valor de x es evidentemente positivo, i cumple con la ecuacion i el problema; lo que está conforme con las condiciones de éste, pues si el correo B marcha con mayor velocidad que el correo C, el encuentro ha de verificarse.

2.° Si $v<v'$, el denominador del valor de x es negativo, i por lo tanto x tambien lo es. Este resultado, ateniéndonos al modo como ha sido enunciado el problema, indica que éste no tiene solucion; porque si el primer correo, separado por una distancia d del segundo, anda con menor velocidad que éste, la distancia d aumentará indefinidamente i el encuentro es imposible.

Pero como el encuentro de los correos puede haber tenido lugar ántes del momento en que se propone el problema, el valor negativo de x corresponde a un punto situado a la izquierda de B. Efectivamente, si en lugar de proponernos hallar la distancia a que se *encontrarán*, buscamos la distancia a que se han *encontrado*, la ecuacion que traduce el problema en este caso es

$$\frac{x}{v}=\frac{x+d}{v'}, \text{ de donde sacamos } x=\frac{dv}{v'-v}.$$

Este valor positivo es el mismo que el anterior, prescindiendo del signo.

Vemos que la solucion negativa indica que el problema es imposible de resolver, tal como ha sido anunciado, i ademas manifiesta que el encuentro de los correos se ha verificado ya, i que por consiguiente la distancia x debe aplicarse a la izquierda del punto B.

3.° Consideremos el caso en que $v=v'$. Teniendo d un valor cualquiera que no es cero, la fórmula

$$x=\frac{dv}{v-v'}, \text{ se convierte en esta } x=\frac{dv}{0}=\infty.$$

Como lo sabemos, la ecuacion que da oríjen a un valor infinito es absurda. Examinemos lo que este valor significa en el problema. Los correos se encontrarán a una distancia del punto B mayor que toda cantidad imajinable: esto es lo que dice el valor infinito de x. Atendiendo a las condiciones que han producido este valor, vemos que hai una distancia que separa los dos correos i que por otra parte ambos marchan con velocidades iguales, de manera que sea cual fuere el tiempo que caminen se hallarán siempre separados por la distancia d. Es tambien claro que el encuentro no puede haber tenido lugar ántes del momento en que se propone el problema, i hai por lo tanto imposibilidad absoluta para que dichos correos puedan encontrarse.

Concluimos entónces que entre el valor infinito de la incógnita i la naturaleza del problema hai perfecta correspondencia, esto es, la *imposibilidad absoluta* de resolver un problema está indicada por el *valor infinito* de la incógnita.

4.° Si ademas de ser v i v' iguales sucede que $d=0$, hallaremos que

$$x=\frac{dv}{v-v'}=\frac{0}{0}.$$

Veamos que interpretacion tiene el valor indeterminado que nos resulta en este caso. Siendo d nula, los correos ocupan el mismo punto, i en su movimiento, puesto que llevan la misma velocidad, marcharán siempre juntos; de manera que a todas las distancias del punto B el encuentro se verifica i por consigüiente el problema admite una infinidad de soluciones.

El resultado aljebraico da pues a conocer la naturaleza del problema, i siempre que hallemos para la incógnita un valor indeterminado concluiremos que el problema lo es tambien.

67. Hasta aquí hemos supuesto que los dos correos caminan en el mismo sentido, pero puede suceder que marchen en sentidos contrarios. Si el correo C, por ejemplo, caminase de derecha a izquierda, la misma ecuacion del primer caso, $\frac{x-d}{v'}=\frac{x}{v}$, nos sirva tambien para el presente, con tal que cambiemos el signo de v'; porque, como ya hemos tenido ocacion de notarlo muchas veces, un cambio en la acepcion de una cantidad se traduce por un cambio de signo, i aquí sucede que el correo C recorre ahora un espacio de v' quilómetros por hora de derecha a izquierda en lugar de hacerlo de izquierda a derecha como en el problema primitivo. La ecuacion anterior se convierte entónces en esta otra: $\frac{x-d}{-v'}=\frac{x}{v}$, de donde resulta $x=\frac{dv}{v+v'}$.

Comparando esta fórmula con la que dedujimos para el caso en que los correos se dirijian en el mismo sentido, vemos que no se diferencian en otra cosa que en el signo de v', i que por consiguiente la fórmula

$$x=\frac{dv}{v-v'}$$

es aplicable a todos los estados en que el problema puede presentarse.

CAPÍTULO VI.

Ecuaciones de segundo grado.

68. Nos ocuparemos ahora de las ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita. En una ecuacion de esta clase no puede haber mas que términos en que la incógnita se encuentre con el esponente dos o con el esponente uno, i términos independientes de la incógnita o constantes. Como es posible trasladar al primer miembro todo los términos de una ecuacion i efectuar la reducciones a que haya lugar, una ecuacion de segundo grado en el caso mas jeneral puede tomar esta forma

$$(1) \qquad ax^2+bx+c=0.$$

Esta ecuacion puede simplificarse mas dividiendo sus miembros por el coeficiente del 1er término, i haciendo $\frac{b}{a}=p$ i $\frac{c}{a}=q$, resulta

$$(2) \qquad x^2+px+q=0.$$

69. El término que contiene la incógnita elevada a la segunda potencia es el que da nombre a la ecuacion de segundo grado i no puede faltar; los otros pueden existir o no. Propongámonos resolver la ecuacion

$$ax=c.$$

Dividiendo por a los dos miembros de esta ecuacion nos resulta

$x^2=\frac{c}{a}$, de donde sacamos, estrayendo la raiz cuadrada, $\quad x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}.$

El doble signo de que aparece afectado el valor de x proviene de ser par el grado de la raiz que se ha estraido (núm. 63, V). Parece que en virtud de esta misma razon debieramos escribir

$$\pm x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}},$$

i que por consiguiente hubiera cuatro valores que tomar en consideracion,

$$+x=+\sqrt{\frac{c}{a}},\quad +x=-\sqrt{\frac{c}{a}},\quad -x=+\sqrt{\frac{c}{a}},\quad -x=-\sqrt{\frac{c}{a}};$$

pero debemos observar por una parte que x nos representa la incógnita, cuyo signo es desconocido hasta el momento de encontrar su valor; por otra que estos cuatro valores son en realidad dos, porque el primero i el último equivalen a uno solo, $x=+\sqrt{\frac{c}{a}}$, i el segundo i tercero a otro, $x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$. Hai pues dos valores que dar a la incógnita que satisfacen la ecuacion propuesta.

Estos valores que cumplen con una ecuacion de segundo grado se llaman *raices de la ecuacion.*

70. La ecuacion puede carecer únicamente del término constante, como sucede en esta

$$ax^2+bx=0.$$

Sacando a x como factor comun hallamos

$$x(ax+b)=0$$

El primer miembro de esta ecuacion puede ser cero de dos maneras, o haciendo $x=0$ o bien admitiendo que $ax+b=0$; de modo que la incógnita tiene tambien en este caso dos valores, $x=0$ i $x=-\frac{c}{a}$.

71 Pero nos resta que resolver la ecuacion jeneral de segundo grado en su forma mas simple

$$x^2+px+q=0.$$

Agregando $\frac{p^2}{4}-q$ a los dos miembros de esta ecuacion, hallamos

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

de donde resulta (núm. 15, ejemplo 1.°)

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Estrayendo la raiz cuadrada encontramos

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

i finalmente (1) $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Tenemos pues dos valores de x que cumplen con la ecuacion jeneral,

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ i } x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Traduciendo la fórmula (1) tendremos una regla para determinar los valores de la incógnita en una ecuacion de segundo grado de la forma $x^2+px+q=0$.

La incógnita en una ecuacion de segundo grado es igual a la mitad del coeficiente de la primera potencia de la incógnita con signo contrario, mas i ménos la raiz cuadrada de la suma del cuadrado de esta mitad con el término constante afectado tambien de signo contrario.

72. Apliquemos esta regla a la ecuacion siguiente:

$$x^2+5x+6=0$$

$$x=\tfrac{5}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}-6}$$

Las dos raices de la ecuacion son

$$x=-\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}=-2 \text{ i } x=-\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}=-3$$

Del mismo modo, la ecuacion

$$x^2-8x+12=0,$$

da $$x=4\pm\sqrt{16-12},$$

i de aquí $$x=6 \text{ i } x=2$$

73. Poniendo en la fómula (1) del (núm. 71) en lugar de p i q sus valores (n.° 68), encontraremos la fórmula que nos sirve para resolver la ecuacion de la forma $ax^2+bx+c=0$.

$$(1) \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula se emplea cuando la segunda potencia de la incógnita tiene coeficiente; pero, si se quiere, podemos evitar su uso dividiendo los dos miembros de la ecuacion dada por el coeficiente del primer término, i servirnos entónces de la regla conocida (n.° 71).

74. Ejemplos

1.° $x^2-2x-8=0$ 2.° $x^2+x=30$ 3.° $x^2+6x-9=0$

4.° $x^2+4x-8=0$ 5.° $2x-3x-1=0$ 6.° $5x^2-6x=0$

7.° $3x^2-1=0$ 8.° $\dfrac{4}{x-1}+1=\dfrac{15}{x+2}$ 9.° $x^2+3x+10=0$

75. Observemos que en la fórmula

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

puede suceder que la espresion subradical sea negativa; la cantidad $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ es entónces imajinaria (núm. 63, V), i las raices de la ecuacion son por consiguiente imajinarias. Examinemos la naturaleza de la ecuacion en este caso.

Haciendo $q=\frac{p^2}{4}+m$, en que m es una cantidad positiva, i sustituyendo su valor en la ecuacion, resulta

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}+m=0, \text{ o } (x+\tfrac{1}{2}p)^2+m=0.$$

Sea cual fuere el valor que dèmos a x, la espresion $(x+\frac{1}{2}p)^2$ es positiva, i como m es tambien una cantidad positiva, el primer miembro no puede ser jamas nulo, i por consiguiente la ecuacion tampoco se verificará con ningun valor real de x.

De aquí la divsion de las raices de una ecuacion en dos clases: *raices imajinarias*, que manifiestan que la ecuacion es absurda; i *raices reales*, que indican que la ecuacion es cierta. Todos los ejemplos resueltos hasta aquí nos han dado raices reales, escepto el 9.° del número anterior.

Siendo las raices reales puede suceder que $\frac{1}{4}p^2-q$ tenga raiz cuadrada exacta, i entónces las raices se llaman *conmensurables;* pero en el caso contrario son *inconmensurables*, i su valor no se puede hallar nunca exactamente, aunque sí con la aproximacion que se quiera.

76. Volvamos a tomár la ecuacion jeneral bajo esta forma (núm. 71)

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q.$$

Pasando al primero la cantidad del segundo miembro, resulta

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0;$$

i en virtud de lo que manifiesta el ejemplo 3.° del núm. 15, se halla

$$(1)\quad \left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0.$$

El primer miembro de esta ecuacion equivale al trinomio x^2+px-q, que como se ve *se ha descompuesto en dos factores de primer grado con respecto a x*. Igualando a cero estos factores tenemos

$$x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0 \quad \text{i} \quad x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0;$$

de donde $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ i $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

No hai mas que dos modos de hacer cero el primer miembro de la ecuacion (1), i por lo tanto la incógnita no puede tener ni mas ni ménos valores que los dos que acabamos de encontrar. Esto está conforme con lo que hemos visto en el (núm. 71).

77. Comparando las raices de la ecuacion $x^2+px+q=0$ con los factores de la ecuacion (1) del número anterior, vemos que estos factores se forman restando de x cada una de las raices. Llamando x' i x'' las raices de la ecuacion jeneral, tendremos

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'').$$

Efectuando la multiplicacion indicada en el segundo miembro, nos resulta

$$x^2+px+q=x^2-(x'+x'')x+x'x'';$$

i como esta relacion se verifica sea cual fuere el valor de x, concluimos que

$$x'+x''=-p \text{ i } x x''=q.$$

De modo que *en una ecuacion de segundo grado de la forma* $x^2+px+q=0$, *el coeficiente de la primera potencia de la incógnita es igual a la suma de las dos raices tomada con signo contrario, i el término constante es igual al producto de dichas raices con el mismo signo.*

78. En vista del modo como la raices de una ecuacion de segundo grado entran en la composicion de los coeficientes de esta ecuacion, podemos concluir:

1.° Dadas las raices de una ecuacion de segundo grado se puede formar la ecuacion. Si 4 i 5 son dichas raices, la ecuacion correspondiente es $x^2-(4+5)x+4\times5=0$, o bien $x^2-9x+20=0$.

2.° Las raices tienen el mismo signo o signos contrarios, segun que el término constante es positivo o negativo. En el primer caso el signo comun es contrario al del segundo término de la ecuacion, i en el segundo el signo de la mayor raiz es tambien contrario al de este término.

3.° Si la ecuacion carece del término constante, una de las raices es cero; i si falta el término en x, las dos raices son iguales i de signos contrarios

79. PROBLEMAS. La regla que hemos dado (n.° 54) para plantear un problema es aplicable a todos los casos, sea cual fuere el grado de la ecuacion que haya de resultar. En cuanto a la interpretacion de los valores que encontremos en la resolucion de una ecuacion de segundo grado, nos atendremos a lo espuesto en el capítulo anterior sobre este asunto; pero es necesario no olvidar que el valor imajinario es el que indica que una ecuacion de segundo grado es absurda, i que por consiguiente nos manifestará tambien la imposibilidad absoluta de resolver un problema.

PROBLEMA PRIMERO. *Una persona ha comprado cierto número de metros de una tela en* 240 *pesos; si con la misma suma hubiese com* *prado 3 metros ménos de la misma tela, le habria costado el metro 4 pesos mas. Se pregunta cuál es el número de metros comprados.*

Llamando x este número, el precio de un metro de tela es evidentemente $\frac{240}{x}$; pero si se hubiese comprado $x-3$ metros el valor del metro seria $\frac{240}{x-3}$; i como en este último caso el valor del metro escede en 4 pesos al primer precio, resulta que

$$\frac{240}{x-3}-\frac{240}{x}=4.$$

Haciendo desaparecer los denominadores i efectuando las reducciones, encontramos

$$\text{o } x^2-3x=180,$$

de donde sacamos

$$x=\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}+180}.$$

Tomando el signo superior hallamos para x el valor 15 que satisface el problema, como es fácil comprobarlo. La otra raiz es negativa, -12, i no cumple con el problema en el sentido de su enunciado: pero haciendo en éste las modificaciones convenientes (núm. 65, 2.°), el número 12 será una solucion.

PROBLEMA SEGUNDO. *Un comerciante vende un objeto en 11 pesos i gana así tanto por 100 cuanto le ha costado el objeto. Se quiere saber cuál fué el precio de la compra.*

Representando por x el precio que el comerciante dió por el objeto, se llega a esta ecuacion

$$x+\frac{x^2}{100}=11;$$

de donde resulta que $x=10$ i $x=-110$. El primer valor cumple con el problema; el segundo es ajeno a la cuestion.

80 Hé aquí algunos problemas que podemos resolver.

I. *Hallar un número tal que si a su cuadrado se le agrega ocho veces el mismo número resulte el número 33.*

II. *Dos individuos han formado compañia: uno ha puesto 30 pesos que estuvieron diez i siete meses en la sociedad; el segundo no suministró su capital sino al cabo de cinco meses. Este capital desconocido forma con la ganancia correspondiente una suma de 26 pesos. La ganancia total ha sido de 18 pesos 75 centavos, i se desea averiguar lo que puso el segundo socio i la ganancia de cada uno.*

III. *Dividir el número* 590 *en dos partes cuyo producto sea* 80464.

IV. *Dos comerciantes venden paño a precios diferentes; el primero vende* 3 *metros mas que el segundo, i los productos que sacan forman una suma de* 350 *pesos. El primer comerciante dice al segundo: yo habría sacado* 125 *pesos del número de metros que has vendido. El segundo responde: yo habria sacado* 240 *pesos del que has vendido. ¿Cuántos metros ha vendido cada comerciante?*

CAPITULO VII.

De las progresiones.

81. *Se llama progresion aritmética una serie de términos tales que la diferencia entre dos de ellos consecutivos es un número constante.*

Así, los números 2, 4, 6, 8, 10 forman una progresion aritmética.

Una progresion aritmética se escribe de este modo

$$\div 2 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 8 \, . \, 10 \, ,$$

i se lee *dos es a cuatro, es a seis, es a ocho*, etc. Esta notacion es la misma que se usa en las equidiferencias en la aritmética.

La diferencia constante que hai entre dos términos consecutivos cualesquiera de una progresion se llama razon.

Una progresion es *creciente* cuando sus términos van siendo cada vez mayores, como sucede en el ejemplo anterior; i es *decreciente* cuando al contrario los términos son cada vez menores. La misma progresion de arriba escrita en órden inverso es decreciente.

$$\div 10 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2.$$

En el primer caso la progresion se forma agregando al primer término la razon para obtener el segundo, a éste se le agrega la razon para determinar el tercero, etc.; i en el segundo se resta del primer término la razon para obtener el segundo, i asi se continúa. Si consideramos la razon como positiva en el primer caso i como negativa en el segundo, podemos decir que cada término de una progresion es la suma del que le antecede i la razon. Una progresion es entónces creciente si la razon es positiva, i decreciente si la razon es negativa.

82. Sea la progresion aritmética

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots\ldots$$

en que r es la razon. Fácilmente se deducen las espreciones siguientes:

$$b=a+r$$
$$c=b+r=a+r+r=a+2r$$
$$d=c+r=a+2r+r=a+3r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De aquí se concluye que *un término* u *que tiene* n *términos delante de él es igual al primero sumado con el producto de la razon multiplicada por el número de términos que le preceden.*

Resulta pues esta fórmula:

$$(1) \qquad u=a+nr.$$

83. Propongámonos determinar la suma de todos los términos de una progresion

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots\ldots\, t \,.\, u.$$

Llamemos la suma, r la razon i n el número de términos, i tendremos

$$s=a+(a+r)+(a+2r)+(a+3r)+(a+4r)+\ldots\ldots,$$

Escribiendo los términos de la progresion en órden inverso, resulta

$$s=u+(u-r)+(u-2r)+(u-3r)+(u-4r)+\ldots\ldots$$

Sumando esta espresion con la anterior hallamos

$$2s=(a+u)+(a+u)+(a+u)+\ldots\ldots+(a+u);$$

i como es claro que el segundo miembro de esta ecuacion contiene tantas veces $(a+u)$ como términos tiene la progresion, concluimos que

$$2s=(a+u)n.$$

Despejando a s tenemos la espresion de lo que se llama *término sumatorio* de la progresion aritmética

$$(1) \qquad s=\frac{(a+u)n}{2}$$

El término sumatorio de una progresion aritmética es igual a la mitad del producto del número de términos multiplicado por la suma del primero i el último.

84. Aplicando al último término de la progresion que precede la regla del núm. 82 resulta

$$u=a+(n-1)r.$$

Esta ecuacion i la (1) del número anterior contienen las cinco cantidades que caracterizan una progresion, de las cuales se pueden determinar dos cuando las otras tres sean conocidas. Resultan de aquí diez problemas diferentes, i ninguno de ellos da oríjen a una ecuacion de un grado superior al segundo.

85. *Se llama progresion jeométrica una serie de términos en que se verifica qne el cociente entre dos términos contiguos es constante.*

El cociente de dos términos consecutivos se llama razon de la progresion; si la razon es mayor que 1 la progresion es creciente, pero es decreciente si la razon es menor que la unidad.

Una progresion jeométrica se escribe de este modo:

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96$$

i se lee *tres es a seis, es a doce,* etc.

86. Sea la progresion jeométrica

$$\div a : b : c : d : \ldots. : l$$

en que r es la razon i n el número de términos. En virtud de la definicion de lo que es progresion, podemos escribir

$$b=ar$$
$$c=br=ar\times r=ar^2$$
$$d=cr=ar^2\times r=ar^3$$

Observando la manera como cada término se compone del primero i la razon, concluimos que *un término cualquiera de una progresion jeométrica es igual al primero multiplicado por la razon elevada a un esponente indicado por el número de términos que lo precede.*

Así,

$$(1) \qquad l = ar^{n-1}$$

87 Sí representamos por s la suma de todos los términos de la progresion

$$\div a : b : c : d : \ldots\ldots : l,$$

tendremos que

$$s = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots + ar^{n-1};$$

i multiplicado por r encontramos

$$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^n.$$

Restando estas espresiones nos resulta

$$sr - s = ar^n - a,$$

i de aquí

$$(1) \qquad s = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{lr - a}{r-1}.$$

Esta fórmula nos da a conocer el término sumatorío de una progresion jeométrica por medio de la razon, el primer término i el último.

Las fórmulas (1) de estos dos últimos números sirven para resolver diez problemas diferentes que resultan de tomar como incógnitas i de dos en dos las cinco cantidades que entran en ellas. De estos problemas podemos resolver aquellos que dan oríjen a ecuaciones que sabemos resolver.

88. PROBLEMAS.—*El primer término de una progresion* *aritmética es 2 i el último 16; se pregunta cuál será la razon de la progresion, habiendo 6 términos entre 2 i 16.*

La fórmula (1) del número 82 da a conocer la razon con los datos de este problema. Determinando a r de esa fórmula tenemos

$$\ldots\ldots \quad r=\frac{u-a}{n}.$$

Aquí $u=16$, $a=2$ i $n=6+1$, i por consiguiente

$$r=\frac{16-2}{6+1}=\frac{14}{7}=2.$$

La razon buscada es 2 i la progresion es entónces

$$\div 2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10\,.\,12\,.\,14\,.\,16.$$

Lo que hemos hecho en el presente problema ha sido *intercalar* entre dos números dados cierto número de *medios proporcionales aritméticos o por diferencia*. Si entre a i u se quiere intercalar m medios por diferencia, la razon será

$$r=\frac{u-a}{m+1}. \qquad (1)$$

El mismo problema se puede resolver en una progresion jeométrica. Así, si entre a i l se nos pide intercalar m medios proporcionales por cociente, la fórmula (1) del núm. 86 nos da

$$r=\sqrt{\frac{l}{a}}.$$

Si $l=16$ i $a=4$ i queremos intercalar un medio proporcional por cociente, tendremos que