EDUARDO GUERRA VEGA
Profesor de Matemáticas Elementales de la Escuela de
Artes y Oficios
SANTIAGO DE CHILE

TEORIA UNITARIA DEL CAMPO GRAVITATORIO Y ELECTROMAGNETICO

SANTIAGO DE CHILE
Imprenta «La Sud - América»
1939

TEORIA UNITARIA DEL CAMPO GRAVITATORIO Y ELECTROMAGNETICO

EDUARDO GUERRA VEGA
Profesor de Matemáticas Elementales de la Escuela de
Artes y Oficios
SANTIAGO DE CHILE

TEORIA UNITARIA DEL CAMPO GRAVITATORIO Y ELECTROMAGNETICO

SANTIAGO DE CHILE
Imprenta «La Sud - América»
1939

TEORIA UNITARIA DEL CAMPO GRAVITATORIO Y ELECTROMAGNETICO

Después de la inesperada solución dada por Einstein al dificilísimo problema de la gravitación (teoría de la relatividad general), el esfuerzo de los teóricos se dirigió principalmente a resolver el problema de reducir a un esquema único los campos gravitatorio y electromagnético, siguiendo las líneas generales propiciadas por Minckowski. Los ensayos hechos hasta ahora en este sentido pueden clasificarse en dos tipos: aquellos que directa o indirectamente atribuyen más de cuatro dimensiones al Universo (Einstein y Kaluza) y los que pretenden conseguir su objetivo generalizando los espacios de Riemann (Weil y Eddington). Aun cuando todos estos trabajos contienen interesantes puntos de vista, de ninguno puede decirse que sea la solución definitiva del problema, entre otras razones, porque ninguno de los esquemas que proponen permite deducir el primer grupo de ecuaciones de la teoría electromagnética. ($F^{ik}{}_{;k} = \rho_0 u^i$)

A pesar de que en el último tiempo parece haberse abandonado la esperanza de resolver este problema, le he dedicado una parte considerable de mi energía, con el resultado que expongo en esta memoria, porque tengo la convicción de que sólo mediante la superación de esta dificultad la física teórica podrá salir de su actual impasse.

La base del esquema cuadridimensional que propongo es una nueva generalización de la geometría de Riemann, que incluye como casos particulares los espacios de Weil, Eddington y Cartan, cuyos principios generales desarrollo en la primera parte de este trabajo. Como se verá, todas las ecuaciones de la teoría electromagnética se deducen naturalmente de este esquema, junto a las ya conocidas de la relatividad general.

A.—ESPACIOS DE RIEMANN GENERALIZADOS

1).—Traslación paralela.—Se llama vector estacionario en P, o vector que se traslada paralelamente desde P a otro punto infinitamente vecino P′, a todo vector (η) cuyas componentes contravariantes η^i satisfacen, en ese punto, la ecuación,

$$(1) \qquad \frac{\partial \eta^i}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} rk \\ i \end{Bmatrix} \eta^r = 0$$

en forma abreviada,

$$\eta^i_{\ ;k} = 0$$

notación en que la presencia del punto y coma caracteriza un índice introducido por la derivación covariante.

La ecuación (1) suscita de inmediato la idea de una generalización: *En adelante diré que un vector (η) de componentes contravariantes η^i es estacionario o efectúa una traslación paralela en P, si satisface en ese punto la ecuación,*

(2) $$\eta^{i}{}_{;k} = F_{s}{}^{i}{}_{,k}\, \eta^{s}$$

en que $F_{s}{}^{i}{}_{,k}$ es un tensor arbitrario de tercer orden que determina en cada punto ciertas propiedades *no métricas* del espacio.

Utilizando la relación,

$$\eta_{i} = g_{ik}\ \eta^{k}$$

es fácil deducir que para las componentes covariantes del vector (η) deberá tenerse,

(2') $$\eta_{i;k} = F^{s}{}_{i,k}\ \eta_{s}$$

2).—Tensor de Riemann-Christoffel generalizado.— Si, partiendo de la nueva definición de vector estacionario, hacemos a un vector η^{i}, por traslación paralela, describir un circuito cerrado, se encuentra que la integrabilidad o no integrabilidad de la dirección depende de un tensor de cuarto orden, diferente del de Riemann-Christoffel. Efectuando las operaciones en la misma forma en que se hace ordinariamente, cuando se trata de este problema en los espacios de Riemann y teniendo en cuenta que la ecuación (2) puede escribirse en la forma,

(2 a) $$\frac{\partial \eta^{i}}{\partial x_{k}} - \left(\begin{matrix} r\,k \\ i \end{matrix}\right) \eta^{r} = 0$$

donde se ha puesto,

(3) $$\left(\begin{matrix} r\,k \\ i \end{matrix}\right) = \left\{\begin{matrix} r\,k \\ i \end{matrix}\right\} - F_{r}{}^{i}{}_{,k}$$

se comprende que el nuevo tensor de cuarto orden no tenga otra diferencia con el tensor de Riemann-Christoffel que la que resulta de reemplazar en éste los símbolos de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} r\,k \\ i \end{matrix} \right\}$ por los símbolos $\left(\begin{matrix} r\,k \\ i \end{matrix} \right)$.

Designando el nuevo tensor por $^*R^i_{krs}$, la variación total del vector η^i, trasladado paralelamente alrededor de un circuito cerrado infinitamente pequeño, resulta ser,

$$(4) \qquad d\,\eta^i = \tfrac{1}{2}\ {}^*R^i_{krs}\,\eta^k\,d\,S^{rs}$$

Si separamos en $^*R^i_{krs}$ las dos partes que componen los símbolos $\left(\begin{matrix} r\,k \\ i \end{matrix} \right)$, podemos escribir,

$$(5) \qquad {}^*R^i_{krs} = R^i_{krs} - (F_{k\,,s}^{\ i})_{;r} + (F_{k\,,r}^{\ i})_{;s} +$$

$$+ F^{\ i}_{r,u} \cdot F^{\ u}_{k,s} - F^{\ i}_{s,u} \cdot F^{\ u}_{k,r}$$

ecuación que demuestra la posibilidad de considerar espacios en que el tensor de Riemann-Christoffel $R^i_{krs.}$ es diferente de cero, y en los cuales se tiene, sin embargo, paralelismo absoluto, a la manera euclideana, cuando $^*R^i_{krs}=0$.

3).—Líneas geodésicas.—De la misma manera que la nueva geometría ha separado dos conceptos, en relación con la curvatura, que en la geometría de Riemann permanecen unidos, también introduce una separación en la noción de curvas geodésicas. Las líneas más cortas o, mejor dicho, de longitud extrema, que pueden trazarse entre dos puntos, siguen siendo dadas por las ecuaciones diferenciales,

$$(6) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} r\,k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = o$$

pero las curvas, cuyas tangentes son estacionarias en cada uno de sus puntos, no corresponden ahora a estas ecuaciones sino a las siguientes:

$$(7) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} r\ k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = F_{r,k}^{\ i} \cdot \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_r}{ds}$$

obtenidas multiplicando interiormente ambos miembros de (2) por $\frac{dx_k}{ds}$ y substituyendo, en seguida, η^i por $\frac{dx_i}{ds}$. Solamente en la geometría de Riemann estos grupos, (6) y (7), se confunden y ambas definiciones de líneas geodésicas son equivalentes.

En adelante usaremos las ecuaciones (7) en forma más breve,

$$(7\ a) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} r\ k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \beta F_r^{\ i} \frac{dx_r}{ds}$$

reemplazando $F_{s,\ k}^{\ i} \frac{dx_k}{ds}$ por $\beta\ F_s^{\ i}$. ($F_s^{\ i}$ es un tensor de segundo orden y β un factor numérico).

B.—SOBRE UN CASO ESPECIALMENTE INTERESANTE DE LA GEOMETRIA GENERALIZADA

4).—Aun cuando desde el punto de vista de la geometría pura, todos los espacios particulares que se obtienen imponiendo condiciones restrictivas al tensor $F_{s,k}^{\ i}$ son igualmente interesantes (*), no ocurre lo mismo tratándose de las aplicaciones prácticas. Por esta razón, debo preocuparme, ahora, sólo del caso siguiente: *en que la traslación paralela no altera la longitud del vector trasladado.*

Designando por l el cuadrado de la longitud de un vector estacionario (η), esta condición equivale a exigir que se tenga,

$$(9) \qquad \delta l = o$$

(*) NOTA DEL AUTOR.—Entre éstos se encuentran los de Weil, Eddington y Cartan; los primeros resultan de imponer a $F_{s,k}^{\ i}$ las condiciones restrictivas:

$$a) \ \delta l = l \ \varphi_i \, dx_i \quad y \quad b) \ F_{s,k}^{\ i} = F_{k,s}^{\ i}$$

Los de Eddington se obtienen cuando se suprime la primera condición, por lo que los espacios de Weil aparecen como un caso particular de éstos. Finalmente, los espacios de Cartan se obtienen reemplazando la condición (b) por la siguiente:

$$c) \ T_{sk}^{i} = \tfrac{1}{2} \left(F_{s,k}^{\ i} - F_{k,s}^{\ i}\right)$$

manteniendo además la condición (a). Los símbolos T_{sk}^{i} se conocen con el nombre de tensores de Cartan y son seudosimétricos respecto de sus índices inferiores. Cuando los tensores de Cartan se anulan, las condiciones (b) y (c) se identifican, por lo que los espacios de Weil son también un caso particular de los de Cartan. Como he dicho anteriormente, todos estos espacios están contenidos en la geometría generalizada definida en este párrafo. Mediante las ecuaciones de definición (a), (b) y (c), y la ecuación (11), es posible deducir las fórmulas particulares que los caracterizan.

Diferenciando ambos miembros de la ecuación de definición,

$$(10) \qquad 1 = g_{ik}\, \eta^i \eta^k$$

se encuentra sin mucha dificultad, haciendo uso de (2), la relación,

$$(11) \qquad \delta 1 = (F_{ik,s} + F_{ki,s})\, \eta^i \eta^k\, dx_s$$

por consiguiente, en el caso particular que nos preocupa, el tensor $F_{s\ ,k}^{\ i}$ debe cumplir necesariamente la condición,

$$(12) \qquad F_{ik,s} = - F_{ki,s}$$

o sea, debe ser seudosimétrico respecto de sus dos primeros índices.

El uso frecuente que haremos en el párrafo que sigue de esta geometría, justifica la introducción de la abreviatura que se hace ordinariamente en los tensores seudosimétricos de segundo orden, cuando sus índices no son de la misma variancia. Se acostumbra escribirlos en una sola columna, sin olvidar que al índice inferior corresponde la primera columna. Así ponemos F^i_k en vez de $F_k^{\ i}$, pero no en vez de $F^i_{\ k}$ que deberá escribirse $-F^i_k$, después de haber permutado los índices.

De acuerdo con esto, pondremos en adelante para la derivada covariante de un vector estacionario, según (2) y (2′),

$$(2\,a) \qquad \eta^i_{;k} = F^{\,i}_{s,k}\, \eta^s$$

$$(2'a) \qquad \eta_{i;k} = -F^{\,s}_{i,k}\, \eta_s$$

La ecuación (7a) se escribirá,

$$(7\,b) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} r\,k \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \beta F^i_r \frac{dx_r}{ds}$$

C.—TEORIA UNITARIA DE LA GRAVITACION Y DEL ELECTROMAGNETISMO

5).—La geometría definida en el párrafo anterior puede ser utilizada para reunir en un esquema único la teoría de la relatividad general y la teoría electromagnética. Como la teoría de la relatividad general no sufre modificación alguna de fondo, al reemplazar el esquema Einstein-Minckowski por el nuevo, empezaré por aceptar íntegramente los conceptos y postulados introducidos por esa teoría, los que se resumen en la ley general de la gravitación en presencia de materia y energía electromagnética,

$$R^i_k - \tfrac{1}{2}\,\delta^i_k R = \chi\,(T^i_k + E^i_k) \tag{13}$$

que, como sabemos, no se funda exclusivamente en los principios relativistas sino también en los de conservación.

Aceptemos pues, que la geometría del Universo, en presencia de materia y energía electromagnética, no sea del tipo de la de Riemann, sino del más general definido anteriormente. Identifiquemos el factor β del segundo miembro de (7b) con la razón $e : m_o = \rho_o : \mu_o$, entre la carga eléctrica y masa propias del electrón, el cual suponemos moviéndose libremente según las geodésicas del nuevo Universo, y tendremos,

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ {r\,k \atop i} \right\} \cdot \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \frac{e}{m_o} \cdot F^i_r \frac{dx_r}{ds} \tag{14}$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por m_o se reconoce inmediatamente que $\rho_o F^i_r \dfrac{dx_r}{ds}$ es el cuadrivector fuerza electrodinámica. Resulta, además, de todo esto que F_i^k no es sino el tensor de campo electromagnético, introducido sin mayores explicaciones en la teoría Maxwell-Lorentz.

En relación con esto último y a fin de facilitar las interpretaciones tridimensionales de la teoría electromagnética, recordemos que las componentes de F_k^l se identifican con las componentes de los vectores, eléctrico y magnético, de la teoría clásica en la forma siguiente:

Para las componentes covariantes,

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{c} \mathbf{e} = (F_{14}, F_{24}, F_{34}) = (X, Y, Z) \\ \mathbf{h} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = (L, M, N) \\ F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0 \end{array}\right.$$

y, para las componentes contravariantes,

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{c} \mathbf{e}' = (F^{41}, F^{42}, F^{43}) = (X', Y', Z') \\ \mathbf{h}' = (F^{23}; F^{31}, F^{21}) = (L', M', N') \\ F^{11} = F^{22} = F^{33} = F^{44} = 0 \end{array}\right.$$

magnitudes, estas últimas, que en un *sistema galileano* (relatividad restringida) son iguales a **e** y **h** respectivamente.

El cuadrivector potencial electromagnético φ_i, se introduce como definido por las relaciones,

$$(17)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = F_{ik}$$

$$(18)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0$$

Si efectuamos la descomposición espacio-temporal, poniendo,

$$\text{(19)} \qquad \mathbf{f} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad \text{y} \quad \varphi = -\varphi_4$$

de las ecuaciones anteriores se obtienen las relaciones,

$$\text{rot}\,\mathbf{f} = \mathbf{h}\,; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \text{div}\,\varphi = \mathbf{e}\,; \quad \text{div}\,\mathbf{f} = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

que son precisamente las que definen el potencial vector $\mathbf{f}$, y escalar φ, en el cálculo vectorial a tres dimensiones.

6) Primer grupo de ecuaciones de la teoría Maxwell-Lorentz.—Supongamos la ecuación (13) aplicada directamente al electrón, de manera que la densidad que figura en $T^i_k = \mu_0 u^i u_k$ sea la de la masa de éste. Tomemos, ahora, la divergencia de ambos miembros de esta ecuación sin olvidar que el vector (u) es estacionario en el sentido de la definición (2). Teniendo presente las identidades,

$$(R^i_k - \tfrac{1}{2}\delta^i_k R)_{;i} = 0$$

$$T^i_{k;i} = (\mu_0 u^r)_{;r} u^k - \rho_0 F_{ki} u^i$$

$$E^i_{k;i} = F_{ki}\,(F^{is}{}_{;s})$$

se deduce de la operación efectuada con (13), la identidad,

$$\text{(20)} \qquad F_{ki}\,(F^{is}{}_{;s} - \rho_0 u^i) = -(\mu_0 u^r)_{;r} u_k$$

Ahora bien, como el vector entre paréntesis no puede ser perpendicular a u_k, por tener una componente según esa dirección (ρ_0 diferente de cero), la identidad anterior no puede existir sino cuando se tiene,

$$\text{(21)} \qquad (\mu_0 u^r)_{;r} = 0$$

$$\text{(22)} \qquad F_{ki}\,(F^{is}{}_{;s} - \rho_0 u^i) = 0$$

La primera de estas ecuaciones no es sino la conocida ley de conservación de la materia o de continuidad del flujo material, de la cual, por otra parte, no se deduce necesariamente la constancia de μ_0, debido a la definición (2).

En cuanto a la ecuación (22), debemos considerar dos casos:

1.º Cuando $|F_{ik}| = (\mathbf{eh})^2$, *segunda potencia del producto escalar de los vectores, eléctrico y magnético, es diferente de cero.*

En este caso la ecuación (22) no tiene, evidentemente, otra solución que,

$$F^{is}{}_{;s} = \rho_0 u^i \tag{23}$$

Ecuación tensorial que en el sistema especial de coordenadas adoptado por Einstein $\left(\sqrt{-g} = 1\right)$, se escribe:

$$\frac{\partial F^{is}}{\partial x_s} = \rho_0 u^i \tag{23 a}$$

y que desarrollada es equivalente a las cuatro ecuaciones,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial F^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x_4} &= \rho_0 u^1 \\
\frac{\partial F^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x_4} &= \rho_0 u^2 \\
\frac{\partial F^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{34}}{\partial x_4} &= \rho_0 u^3 \\
\frac{\partial F^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{43}}{\partial x_3} &= \rho_0 u^4
\end{aligned}\right. \tag{23 b}$$

Esto sistema de ecuaciones corresponde al *primer grupo* de Maxwell-Lorentz, lo que se reconoce de inmediato efectuando las sustituciones (16).

Poniendo $dx_4 = cdt$, podemos escribir $\rho_0 u^i = \rho' v^i$, donde $\rho' = \frac{\rho}{c}$ es la densidad de la carga medida en unidades electromagnéticas y v^i el cuadrivector velocidad de componentes, $\frac{dx_1}{dt}; \frac{dx_2}{dt}; \frac{dx_3}{dt}; \frac{dx_4}{dt} = c$

Efectuando la descomposición espacio temporal en que las tres primeras componentes de v^i constituyen el vector velocidad representado por $\mathbf{v}$, se tiene,

$$\text{(23 c)} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{h}' - \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{\acute{e}}}{\partial t} = \rho' \mathbf{v} \\ \operatorname{div} \mathbf{\acute{e}} = \rho \end{cases}$$

donde $\rho' \mathbf{v}$ es la densidad de corriente, siendo $\mathbf{v}$ la velocidad de la materia a la que adhiere la carga eléctrica. En el caso particular de un sistema galileano, (23 c) se reduce a,

$$\text{(23 d)} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{h} - \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \rho' \mathbf{v} \\ \operatorname{div} \mathbf{e} = \rho \end{cases}$$

2.° Cuando $|F_{ik}| = (\mathbf{eh})^2 = o$ *(vectores, eléctrico y magnético, perpendiculares).*

En este caso, de acuerdo con los teoremas conocidos sobre sistemas de ecuaciones homogéneas, (20) tiene soluciones diferentes de cero. Designando por α^i al vector que representa una cualquiera de estas soluciones obtenemos,

$$F^{is}{}_{;s} = \rho_0 u^i + \alpha^i \tag{24}$$

donde α^i es tal que se tiene,

$$F_{ik}\,\alpha^i = 0 \tag{25}$$

sistema, que no es difícil comprobar (*), se satisface únicamente para los vectores de la forma,

$$\alpha^i = s\,\beta^i + s'\gamma^i \tag{26}$$

En esta fórmula s y s′ son dos factores numéricos arbitrarios y,

$$\beta^i = (YN\text{-}ZM,\ ZL\text{-}XN,\ XM\text{-}YL,\ L^2 + M^2 + N^2),\ \text{y}$$
$$\gamma^i = (L, M, N, o).$$

Adoptando un sistema de coordenadas en que $\sqrt{-g} = 1$ y efectuando la separación en espacio y tiempo, la ecuación (24) puede escribirse en la forma:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{h}' - \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{\acute{e}}}{\partial t} &= \mathbf{s} + s\,[\mathbf{eh}] + s'\mathbf{h} \\ \operatorname{div}\mathbf{\acute{e}} &= \rho + sH^2 \end{aligned}\right. \tag{24 a}$$

designando por H^2 la cuarta componente del vector β^i.

El sistema (22 a) es evidentemente una generalización del de Maxwell-Lorentz, al que se reduce sólo con admitir la nulidad de s y s′.

---

* En efecto, la condición $|F_{ki}| = 0$ implica también la nulidad de todos los menores de tres al cuadrado elementos de este determinante y, por otra parte, los vectores β^i y γ^i son independientes.

7) Segundo grupo de ecuaciones de la teoría Maxwell-Lorentz.—Debido a la seudosimetría del tensor F_{ik} se tiene, como se sabe, la identidad,

$$F_{ik;r} + F_{ri;k} + F_{kr;i} = 0 \tag{27}$$

que en el sistema especial de coordenadas $\sqrt{-g} = 1$, se reduce a,

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} + \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i} = 0 \tag{27 a}$$

La ecuación tensorial (27 a) resume las cuatro ecuaciones,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \dfrac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0 \end{array}\right. \tag{27 b}$$

Este sistema se conoce con el nombre de *segundo grupo de ecuaciones de Maxwell-Lorentz* y en la forma vectorial, se escribe,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{e} + \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \end{array}\right. \tag{27 c}$$

8) Constancia de la razón $e : m_0$, entre la carga y masa propias del electrón.— A este respecto podemos considerar dos casos:

1.º) Cuando $|F_{ik}|$ es diferente de cero.— Tomando la divergencia de ambos miembros de (23), se tiene,

$$(\rho_0 u^i)_{;i} = 0 \tag{28}$$

ecuación que desarrollada junto a (21) proporciona, (*)

$$d\rho_0 = - \rho_0 f_i dx_j \tag{28 a}$$

$$d\mu_0 = - \mu_0 f_i dx_i \tag{21 a}$$

de donde,

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{d\mu_0}{\mu_0} = 0$$

y, por integración,

$$\rho_0 : \mu_0 = e : m_0 = \text{constante}.$$

2.º) Cuando $|F_{ik}| = 0$.— En este caso no rige la ecuación (23), sino la más general (24), de la que tomando la divergencia, se obtiene,

$$(\rho_0 u^i)_{;i} = - \alpha^i_i \tag{29}$$

ecuación que reemplaza a la (28), conocida con el nombre de *ecuación de continuidad de la electricidad.* Desarrollando (28) junto a (19), se tiene,

---

(*) Las ecuaciones que vienen a continuación, en las que aparece el cuadrivector $f_i = F^s_{i,s}$, se simplifican si restringimos el tensor F, escribiendo $F^s_{i,r} = \beta F^s_i \cdot u_r$, con lo que se tiene $m_0 f_i = p_i$ (cuadrivector fuerza electrodinámica) y, por consiguiente, $f_i \, dx_i = o$.

(29 a) $$d\rho_0 = -\rho_0 f_i dx_i - \alpha_i^i ds$$

(21 a) $$d\mu_0 = -\mu_0 f_i dx_i$$

de donde,

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{d\mu_0}{\mu_0} = -\frac{\alpha_i^i ds}{\rho_0}$$

y, por integración, .

(30) $$\rho_0 : \mu_0 = e : m_0 = ke^{\int \frac{\alpha_i^i dt}{\rho}}$$

La razón $e : m_0$ será, en consecuencia, constante solamente cuando se tenga,

(31) $$\alpha_i^i = 0$$

es decir, cuando sea válida la ecuación de continuidad de la electricidad.

9).—Energía radiante.— Las ecuaciones del primer grupo de Maxwell-Lorentz, (23 d) y (27 c), han sido deducidas en la hipótesis de que ρ_0 no puede anularse, razón por la cual es imposible obtener, a partir de ellas, las ecuaciones de la teoría electromagnética de la luz,

(32) $$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{e} = 0 & \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0 \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{h} = 0 & \mathrm{div}\,\mathbf{e} = 0 \end{array} \right.$$

No queda, por consiguiente, otro camino que recurrir a las ecuaciones generalizadas (23 d) y (24 a)(*), de las que se obtienen, en efecto, sin más que admitir la verificación de las relaciones,

$$
(33) \qquad
\begin{aligned}
&a) \quad \rho' \mathbf{v} = - s\,[\mathbf{eh}] \\
&b) \quad \rho \;\; = - s\mathbf{h}^2 \\
&c) \quad s' \;\; = 0
\end{aligned}
$$

la condición $s' = 0$ no tiene otro objeto que permitirnos identificar la corriente de convección $\rho' \mathbf{v}$ con la de energía $- s\,[\mathbf{eh}]$.

La primera consecuencia interesante derivada de la nueva manera de obtener las ecuaciones (32) es que, en ellas, los vectores **e** y **h** deben ser perpendiculares, pues sólo en este caso las ecuaciones (24 a) existen. De las ecuaciones (32) se deduce, por otra parte, admitida la perpendicularidad de **e** y **h**, que estos vectores son iguales en valor absoluto, y que la velocidad v, de propagación de la onda, es igual a la velocidad de la luz. Multiplicando ambos miembros de (33 a) vectorialmente por **h**, se obtiene, con ayuda de (33 b), la ecuación,

$$
(34) \qquad [\mathbf{hv}] = c \cdot \mathbf{e}
$$

de donde, puesto que **h** y **v** son perpendiculares, la velocidad de los «electrones» que constituyen la corriente de convección es, también, la de la luz.

(*) Las ecuaciones (24 a) han sido tomadas en el caso particular de la teoría de la relatividad restringida. Si se las considera en el caso general se obtiene un sistema generalizado para las ondas electromagnéticas.

De las ecuaciones (32), poniendo,

$$W = \tfrac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) \text{ y } \mathbf{S} = c\,[\mathbf{eh}]$$

resulta,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0 \tag{35}$$

por otra parte, de las ecuaciones (33 a y b) se deduce la relación,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + s\left(\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S}\right) = 0 \tag{36}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = .0 \tag{37}$$

Las ecuaciones (35) y (37) demuestran, de acuerdo con el párrafo (8), que la razón $e : m_o$, entre la carga y masa propias de los «fotoelectrones», permanece constante.

Consideremos una corriente de convección $\rho_o u^i$. Su trayectoria nos es dada por las ecuaciones (7 a) que, en este caso particular ($F_{ik} u^i = 0$), se reducen al sistema,

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} r\,k \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = .0 \tag{38}$$

con lo cual queda demostrado el hecho no bien establecido teóricamente, hasta ahora, aunque aceptado y confirmado por la experiencia, de la desviación de los rayos luminosos por el campo gravitacional.

De todo lo que se ha dicho en este párrafo se desprende que no es posible considerar ondas electromagnéticas propagándose en el vacío sin que esto implique al mismo tiempo un desplazamiento eléctrico con igual velocidad, cuya acción electromagnética es neutralizada por el campo de la onda, de tal manera que las «partículas» eléctricas consideradas se comportan como si estuvieran desprovistas de masa, la cual sería, por consiguiente, exclusivamente de origen electromagnético.

Desaparece con esto la contradicción existente entre las propiedades corpusculares y ondulatorias de la radiación, (teoría de Einstein de los cuantas de luz, efecto Compton, etc.) y al mismo tiempo se abre el camino a la conciliación entre la teoría del campo y las nuevas teorías que constituyen la atomística moderna: mecánica cuántica, mecánica ondulatoria, etc.