UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

ESTEREOMETRIA

APUNTES DE CLASES

EDITORIAL UNIVERSITARIA, S. A.

UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

ESTEREOMETRIA

1958
EDITORIAL UNIVERSITARIA, S. A.
Ricardo Santa Cruz 747, Casilla 10220, Teléfono 36252, Santiago

E S T E R E O M E T R I A

R e s u m e n:

1.- Por cada punto del espacio se puede trazar una infinidad de líneas rectas. Por dos puntos del espacio no se puede trazar mas que una sola línea recta, por lo tanto: dos puntos determinan la posición de una línea recta en el espacio.

2.- Por dos puntos del espacio se puede hacer pasar una infinidad de planos; todos ellos tienen común la recta determinada por aquellos dos puntos. Haciendo girar uno cualquiera de los planos en torno de este eje común, llega a coincidir sucesivamente con cada uno de los demás planos que pasan por este eje.

Por tres puntos que no están situados en línea recta, no se puede pasar más que un solo plano, pues, haciendo girar un plano que pasa por estos tres puntos, en torno de la recta determinada por dos de ellos, el tercer punto dejaría de pertenecer al plano. Tres puntos no situados en línea recta determinan la posicion de un plano en el espacio.

Puesto que toda recta que une dos de estos tres puntos, pertenece totalmente al plano, resulta que la posición de un plano en el espacio queda determinada tambien:

a) Por una recta y un punto situado fuera de ella.

b) Por dos rectas que se cortan, o sea por los lados de un ángulo.

c) Por tres rectas que se cortan en tres puntos, o sea por los lados de un triangulo.

La definición de las rectas paralelas, según la cual rectas paralelas son aquellas rectas que, situadas en un mismo plano, no se cortan jamás por más que se las prolongue, nos enseña que también

d) Dos rectas paralelas determinan la posición de un plano en el espacio.

3.- Dos líneas rectas pueden tener las siguientes posiciones relativas en el espacio;

a) No tienen ningún punto común y están situadas en un mismo plano, es decir, son paralelas;

b) No tienen ningún punto común y no están situadas en un mismo plano, es decir, se cruzan.

c) Tienen un solo punto común, es decir, se cortan.

d) Tienen dos puntos comunes y por esto, coinciden.

4.- Una línea recta puede tener las siguientes posiciones con respecto a un plano;

a) No tiene ningún punto común en el plano por más que se la prolongue, es decir, es paralela al plano;

b) Tiene un solo punto común con el plano, es decir, corta el plano;

c) Tiene dos puntos comunes con el plano, es decir, pertenece al plano.

5.- Dos planos pueden tener las siguientes posiciones uno con respecto al otro:

a) No tienen ningún punto común por más que se los prolongue en todas direcciones, son paralelos:

b) Tienen un punto común sin coincidir, es decir, se cortan.

En este caso subsiste el teorema:

TEOREMA 1.-

La intersección de dos planos es una línea recta.

Dem:

Los planos tienen dos dimensiones, luego su intersección será de una dimensión, o sea, una línea. Ahora bien, si esta línea no fuera recta, se podrían señalar en ella tres puntos no situados en línea recta. Estos tres puntos deberían pertenecer a los dos planos sin que éstos coincidieran, lo que es imposible, porque por tres puntos del espacio no situados en línea recta no se puede pasar más que un solo plano.

c) Tienen tres puntos comunes que no están situados en línea recta, es decir, coinciden.

EJERCICIOS:

1.- Una línea curva o angulosa, ¿puede al mismo tiempo pertenecer a dos planos?

2.- Por un punto dado fuera de una recta, cuántas rectas paralelas a la recta dada se pueden trazar en el espacio?

3.- ¿Por qué se emplean trípodes para afirmar los instrumentos matemáticos en el suelo?

4.- ¿Cuántos puntos de una puerta que gira sobre sus goznes, deben afirmarse, para que la puerta no se pueda mover?

LAS RELACIONES ENTRE PLANOS Y LINEAS RECTAS:

1.- DE LAS RECTAS PERPENDICULARES A UN PLANO:

TEOREMA 2:

Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que pasan por su punto de penetración, es perpendicular a cualquiera otra recta del plano trazada por este punto (Fig. 1).

Hip: $AD \perp BD$, $AD \perp DC$,

Tes: $AD \perp DE$

Dem:

Prolónguese la recta AD más allá de D, hacien-

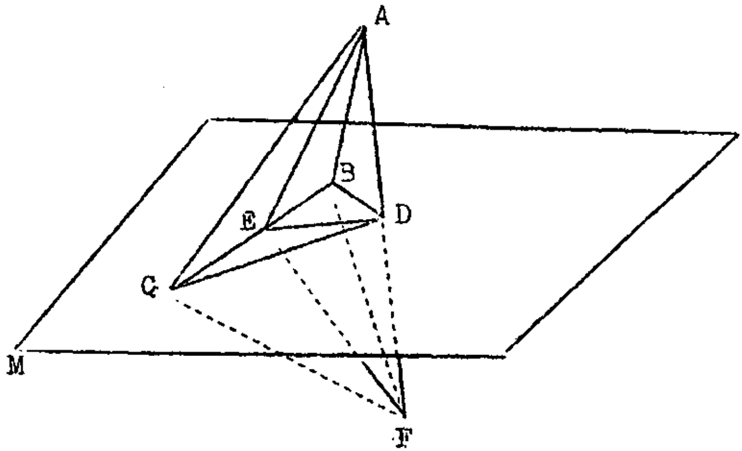

Fig. 1

-do DF = AD, y trácense las rectas AB, AC, FB y FC. Unase B y C por una línea recta y trácese la recta DE en una dirección cualquiera sobre el plano (MN), (Designaremos generalmnnte un plano con dos letras encerradas entre paréntesis, correspondientes a dos puntos del plano no situados en una misma recta trazada en este plano), hasta su intersección E con CB. Unase finalmente E con A y F. Demostraremos que

$$\sphericalangle EDA = EDF = R$$

Tenemos;

1.- $\triangle ADB \cong \triangle FDB$; luego $AB = FB$;

2.- $\triangle ACD \cong \triangle DCF$; " $AC = FC$;

3.- $\triangle ACB \cong \triangle CBF$; " $\sphericalangle ACE = FCE$;

4.- $\triangle ACE \cong \triangle FCE$; luego $AB = EF$;

5.- $\triangle AED \cong \triangle FED$; " $\sphericalangle ADE = EDF$;

Estando estos dos últimos ángulos en posición de ángulos adyacentes, cada uno de ellos es recto, lo que demuestra la tesis. (Esta demostración fué dada por Cauchy).

Definición:

Una recta que es perpendicular a todas las rectas de un plano que pasan por su punto de penetración, se llama perpendicular al plano; toda otra recta que corta el plano, se llama oblicua al plano. El Teorema anterior enseña que para la demostración de la perpendicularidad de una recta a un plano, baste hacer ver que es perpendicular a dos de las rectas del plano trazadas por su punto de penetración.

COROLARIO 1:

En un punto de un plano no se puede levantar más que una perpendicular al plano.

Dem;

(indir): Trácese otra recta cualquiera por el punto dado, pásese un plano por esta recta y la perpendicular.

COROLARIO 2:

Desde un punto fuera de un plano no se puede bajar más que una perpendicular al plano.

D e m;

(indir.): Trácese por el punto dado otra recta cualquiera al plano, hágase pasar un plano por las dos rectas que parten del punto dado.

COROLARIO 3:

La perpendicular bajada a un plano desde un punto situado fuera de él, es la más corta de todas las rectas que de ese punto se pueden trazar al plano.

D e m,: fácil.

COROLARIO 4:

Todas las rectas oblícuas trazadas desde un mismo punto fuera de un plano y cuyos puntos de penetración están a igual distancia del pie de la perpendicular bajada del mismo punto, son iguales entre sí.

D e m:

Por la congruencia de triángulos rectángulos.

COROLARIO 5:

Las rectas oblícuas trazadas a un plano desde un punto situado fuera de él, son tanto más largas cuanto más sus puntos de penetración disten de la perpendicular bajada desde el punto al plano.

D e m:

Por la congruencia de triángulos rectángulos.

Definición:

Entiéndase por distancia de un punto a un plano la longitud de la perpendicular bajada desde el punto al plano.

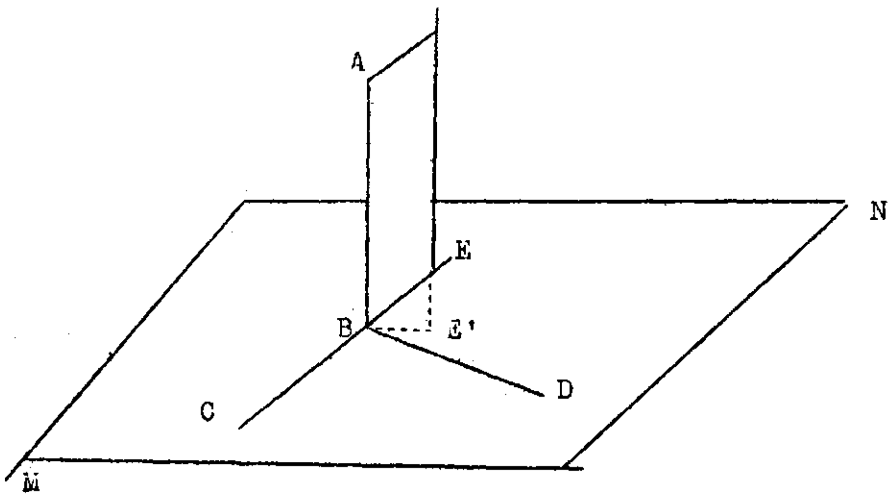

Fig. 2

TEOREMA 3:

(Recíproco del teor. 2) Cuando una recta es perpendicular a tres o más rectas que la cortan en un mismo punto, estas rectas pertenecen a un mismo plano (Fig. 2).

Dem:

Sea AB perpendicular a BC, BD y BE.

Pásese por BC y BD el plano (MN). Entonces BE estará necesariamente situada, en el mismo plano. Pues, si no fuera así, se podría hacer pasar un plano por AB y BE que cortaría el plano (MN) según una recta BE', distinta de BE.

Como, según la hipótesis, AB es perpendicular a BC y BD, debe ser perpendicular al plano (MN) y por lo tanto a BE' (Teor 2) y de aquí resultaría que AB sería perpendicular a la vez a las rectas BE y BE' situadas con AB en un mismo plano, lo que es imposible.

COROLARIO:

Cuando se hace girar el plano determinado por los lados de un ángulo recto, en torno de uno de estos lados, el otro lado describe un plano.

TEOREMA 4:

Dos (o más) rectas perpendiculares a un mismo plano, son paralelas entre sí (fig. 3).

Dem:

Sean AB y CD perpendiculares a (MN).

Trácese en (MN), BE $\perp$ BD y hágase BE = C'D y trácese BC' y DE. Entonces, BC'D $\cong$ DEB, luego BC' = DE. Uniendo E con C', resulta BC'E $\cong$ C'DE y por lo tanto, EBC' = C'DE = R. EB es, pues, perpendicular a BC', BA y

BD y según teor. 3, estas tres rectas están situadas en un mismo plano.

Pero necesariamente, CD pertenece al mismo plano, por tener los puntos D y C' comunes con él y siendo AB y CD perpendiculares a una misma recta de este plano, resulta AB//CD.

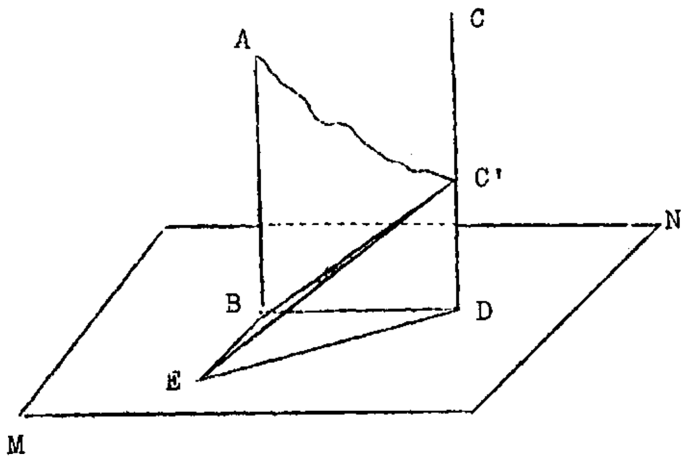

Fig. 3

TEOREMA 5:

(Recíproco del teor. 4) Cuando una de dos (o más) rectas es perpendicular a un plano, también la otra lo es.

D e m:

Análoga a la del teor. 4 o indirecta.

TEOREMA 6:

Dos rectas del espacio paralelas a una tercera, son parelelas entre sí.

Dem:

Por medio de un plano perpendicular a una de las rectas y teor. 5 y 4.

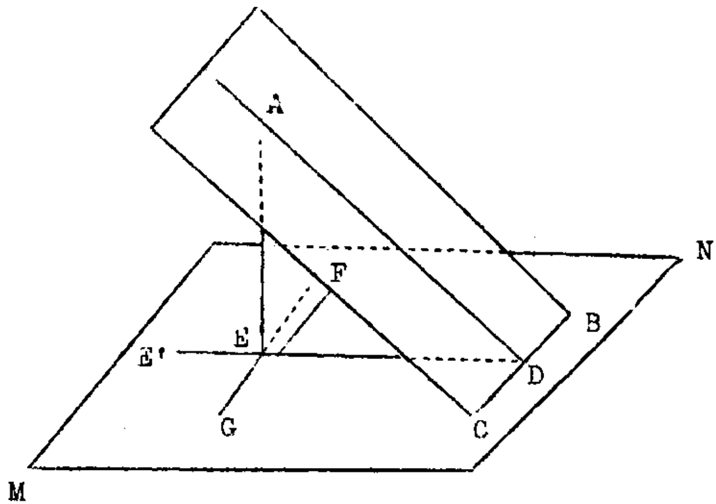

Fig. 4

Problema fundamental:

(La planteación de este problema y otros parecidos dados en los ejercicios, obedece al fin de hacer ver la posibilidad teórica de su resolución gráfica).

Desde un punto A situado fuera de un plano (MN), bajar la perpendicular al plano.

Construcción:

Trácese en el plano (MN) una recta cualquiera BC, hágase pasar un plano por A y la recta BC y bájese en este plano la perpendicular AD a BC. En el plano (MN), levántese la perpendicular DE' a BC y en el plano determinado por AD y DE', trácese AE $\perp$ DE'. AE es la perpendicular pedida (Fig. 4.)

D e m:

En (MN) trácese FC $\perp$ BC. Puesto que BC es perpendicular a AD y DE y por lo tanto al plano ADE', también EG es perpendicular a este plano y por consiguiente, a AE. Siendo, pues AE perpendicular a DE y FG, AE es perpendicular al plano (MN).

Problema fundamental:

En un punto dado A de un plano, levantar la perpendicular al plano.

Construcción:

Desde un punto B situado fuera del plano, bájese la perpendicular BC eal plano, pásese por BC y A el plano determinado por estos elementos y trácese en el plano la paralela a BC por el punto A.

D e m:

Véase teor 5.

E J E R C I C I O S;

1.- En un punto dado de una línea recta, ¿cuántas perpendiculares se pueden levantar en el espacio y cómo están situadas?

2.- Desde un punto dado fuera de una línea recta, ¿cuántas perpemdiculares se pueden bajar a ella?

3.- Dos rectas que, en el espacio, son perpendiculares a una tercera, ¿son necesariamente paralelas?

4.- Dos rectas que se cruzan ¿pueden ser perpendiculares a un mismo plano?

5.- La distancia de un punto del espacio a un punto A del plano, es igual a 11,38 cm. y la distancia de A al pie de la perpendicular bajada del punto del espacio al plano, igual a 4,62 cm. ¿Cuál es la distancia del punto al plano?

6.- Las distancias de dos puntos A y B a un plano (MN) son <u>a</u> y <u>b</u> respectivamente. La distancia de los pies de las perpendiculares bajadas desde A y B al plano, es igual a C<u>c</u>. ¿Cuál es la distanfia de A a B?

2.- DE LAS RECTAS OBLICUAS A UN PLANO:

Definición:

Si desde un punto cualquiera de una recta oblícua a un plano, se baja la perpendicular al plano y se une su pie con el punto de penetración de la oblícua, esta recta de unión es la proyección de la oblícua sobre el plano y el ángulo que la oblícua forma con su proyección es el ángulo que la oblícua formà con el plano.

TEOREMA 7:

Todas las perpendiçulares que se pueden bajar de los puntos de una oblícua a un plano, están situadas en un mismo plano.

D e m:

Teor. 4.

TEOREMA 8:

El ángulo que una recta oblícua forma con un plano (ángulo de inclinación), es el menor de todos los ángulos que la oblícua forma con las rectas del plano trazadas por su punto de penetración.

D e m:

(fig. 5): Sea $AC \perp (MN)$. Hágase $BD = BC$ y trácese AD. Entonces los triángulos ABC y ABD tienen dos de sus lados iguales, pero $AD > AC$, $\measuredangle ABD > ABC$.

TEOREMA 9:

Una oblícua a un plano forma ángulos iguales con aquellas rectas del plano que pasan por su punto de penetración en el plano y forman ángulos iguales con su proyección sobre este plano.

D e m:

(Fig. 5): Sea $AC \perp (MN)$ y $\measuredangle EBC = CBD$; demostraremos que $\measuredangle EBA = BD$ y únase C con E y con D. Entonces $\triangle EBC \cong CBD$, luego $CE = CD$ y por lo tanto $AE = AD$. De aquí resulta que $\triangle ABE \cong ABE$ y por consiguiente, $\triangle ABE \cong DBA$.

Formar el teorema recíproco del 9.

CORolario:

Toda recta oblícua a un plano es perpendicular a una sola recta del plano; v.gr., a aquella que pasa por el punto de penetración de la oblícua y es perpendicular a la proyección de ella sobre el plano.

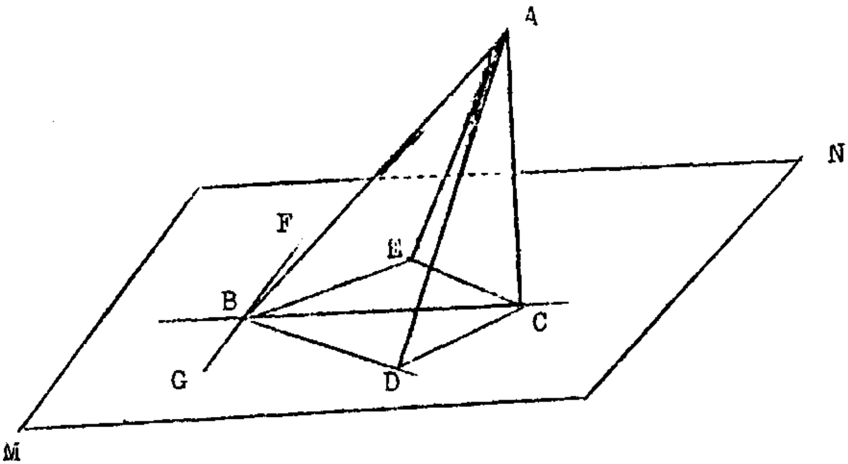

Fig. 5

Siendo $FG \perp BC$ (Fig. 5) resulta que $AB \perp FG$.

TEOREMA 10:

Si dos rectas de un plano forman ángulos desiguales con la proyección de una oblícua que pasa por su intersección, la oblícua forma el angulo mayor con aquella de las dos rectas que forma el angulo mayor con su proyección.

Dem:

(fig. 5): Sea $AC \perp (MN)$ y $EBC > CBD$; démostraremos que $\sphericalangle$ $ABE > ABD$. Hágase $EB = BD$ y trácese CE y CD. Los triángulos EBC y CBD tienen dos de sus lados iguales, pero $EBC > CBD$; luego $CE > CD$ y por lo tanto, $AE > AD$, de donde se deduce que $ABE > ABD$.

Formar el teorema recíproco del 10.

COROLARIO 1:

El mayor de todos los ángulos que una oblícua forma con las rectas de un plano trazadas por su punto de penetración, es el que forma con la prolongación de su proyeccion mas alla del punto de penetracion.

COROLARIO 2:

Toda recta que forma ángulos iguales con tres rectas de un plano trazadas por su punto de penetración, es perpendicular al plano.

TEOREMA 11;

Dos ángulos del espacio cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales entre sí, si son de la misma naturaleza y suplementarios, si son de distinta naturaleza.

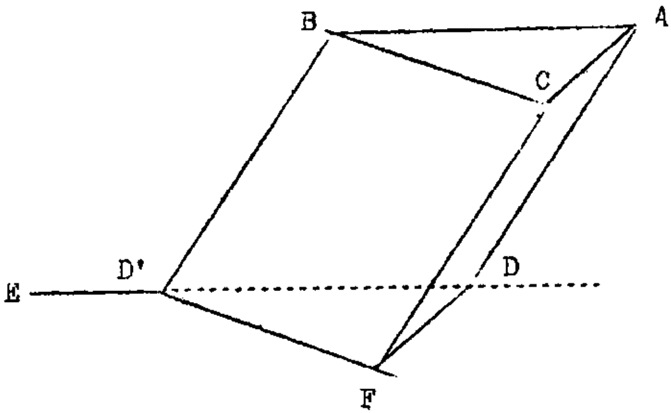

Fig. 6

D e m;

Sean AB = DD', BC = DF, demostraremos que $\triangle$ ABC $\cong$ DEF y ABC + FED' = 2 R. Haciendo AB = DD' y CB = FD' y trazando AD, BE y CF. Tenemos que ABDD' y CBD'F son paralelógramos (¿por qué), de donde se desprende que AD es igual y paralela con CF. Trazamdo, finalmente, AC y DF, se observa que también ADCF es un páralelógramó y luego AC = FD. De aquí resulta que $\triangle$ ABC $\cong$ DD'F, de manera que $\measuredangle$ ABC = DEF. Ahora bien, DEF es el suplemento del D'DF, luego te-

-nemos que $ABC + ED'F = 2R$ (fig..6).

TEOREMA 12:

Rectas paralelas forman ángulos iguales con un mismo plano.

D e m. sencilla;

E J E R C I C I O S;

1.- Dos rectas trazadas a un plano desde un mismo punto fuera de él y que forman ángulos iguales con él, son iguales entre sí y recíprocamente.

2.- El lugar geométrico de los puntos de un plano que tienen igual distancia a un punto situado fuera del plano, es una circunferencia.

3.- Desde un punto situado fuera de un plano se ha trazado una oblícua al plano que tiene una longitud a y que forma un ángulo de $30°$ con el plano. ¿Cuál es la distancia del punto al plano?

3.- DE LAS RECTAS PARALELAS A UN PLANO;

TEOREMA 13:

Si una recta situada fuera de un plano es paralela a una recta trazada en este plano, es paralelo al plano (Fig. 7)

Dem:

Sea AB // CD; AB y CD determinan la posición del plano (AD). Si AB cortara el plano (MN), el punto de penetración de AB en (MN) estaría situado en el plano determinado por AB y CD, es decir, AB cortaría a CD, lo que es contrario a la hipótesis del teorema.

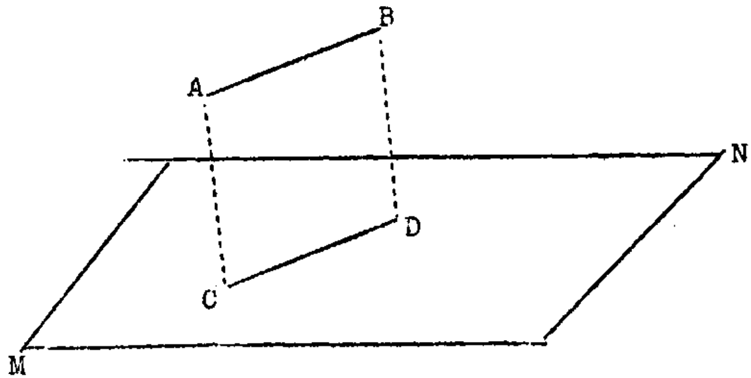

Fig. 7

Observación:

El teórema 13 demuestra la existencia de rectas paralelas a un plano.

TEOREMA 14:

(Recíproco). Si una recta es paralela a un plano, es paralela a toda recta de este plano situada en un plano con ella.

Dem. Sencilla.

Preguntas:

¿Dos rectas paralelas a un mismo plano son paralelas entre sí? ¿Cuantas rectas paralelas a un plano se pueden pasar por un punto situado fuera de él?

EJERCICIOS:

1.- Por un punto dado fuera de un plano, trazar una recta paralela al plano.

2.- Dado un punto en una línea recta, pasar por este punto un plano perpendicular a la recta.

3.- Determinar el lugar geométrico de dos puntos que tienen igual distancia a dos puntos dados.

4.- Dado un punto P en una recta AB paralela a un plano (MN), trazar desde el punto P una recta al plano que tenga la longitud a y forme con la recta del ángulo α.

5.- Dadas dos rectas AB y CD que se cruzan, pasar por AB un plano paralelo a ED.

6.- Pasar por un punto dado un plano paralelo a dos rectas que se cruzan.

7.- Pasar por un punto dado una recta que corte dos rectas dadas que se cruzan.

8.- Construir una recta paralela que sea equidistante de tres rectas paralelas no situadas en un mismo plano.

COMBINACION DE DOS PLANOS

1.- DOS PLANOS QUE SE CORTAN :

Definición:

Dos planos que se cortan, forman un ángulo diedro. Entiéndese por ángulo diedro el monto de la rotación que uno de los planos debe ejecutar para llegar a coincidir con el otro. Los planos que forman el diedro, se llaman caras y la intersección de las caras, arista del diedro.

Un ángulo diedro se lee, si está aislado, por las dos letras de su arista. Si varios diedros tienen una arista común, se lee cada uno por cuatro letras, tomando una de cada plano y colocando en el medio las de la arista. La magnitud de un ángulo diedro no depende de la extensión de sus caras, sino de la mayor o menor inclinación que una tenga con respecto de la otra.

En un ángulo diedro llámase ángulo rectilíneo o plano al ángulo plano formado por dos perpendiculares a la arista, trazadas en un mismo punto de ella y una en cada cara. El ángulo rectilíneo correspondiente a un diedro es el mismo, cualquiera que sea el punto de la arista elegido para su construcción. (¿Por qué?).

TEOREMA 15:

A ángulos diedros iguales corresponden ángulos rectilíneos iguales.

Dem. (Fig. 8): Sean AB y A'B" dos diedros iguales y $\sphericalangle$ CDE y C'D'E' los ángulos rectilíneos correspondientes. Hágase coincidir el diedro A'B' con el AB de manera que D' coincida con D. Entoncds C'D' coincidirá con CD y E'D' con ED, o en otros términos, $\sphericalangle$ C'D'E' = CDE.

TEOREMA 16:

(Recíproco). A ángulos rectilíneos iguales, corresponden ángulos diedros iguales.

Dem:

Hacer coincidir los ángulos rectilíneos y demostrar que los diedros correspondientes deben coincidir.

TEOREMA 17:

Dos ángulos diedros están en la misma razón que los ángulos rectilíneos correspondientes y viciversa.

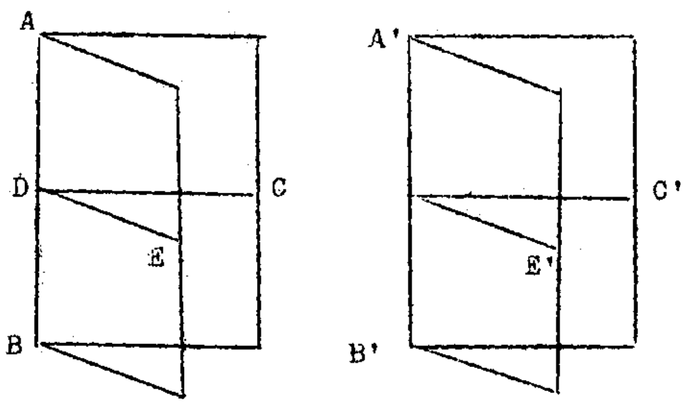

Fig. 8

Dem:

Dividir los ángulos rectilíneos por medio de una medida común y aplicar teor.

Observación:

Según los teoremas, anteriores, el ángulo rectilíneo puede ser considerado como medida del ángulo diedro. (Aunque tal modo de expresarse es incorrecto). En virtud de esto, los teoremas planimétricos acerca de ángulos adyacentes y opuestos por el vértice, su división en ángulos rectos, agudos, oblícuos, etc., su expresión en grados, minutos y segundos pueden aplicarse directamente a los ángulos diedros. Especialmente, se entiende por planos perpendiculares uno al otro, aquellos que, al cortarse, forman diedros rectos.

TEOREMA 18:

Si dos planos son perpendiculares entre sí y en uno de ellos se traza una perpendicular a la intersección de los dos planos, esta perpendicular lo será también al otro plano. (fig. 9).

Dem:

Sea (ED) $\perp$ (AB), EF la intersección de estos planos y CG $\perp$ EF en (AB). Ahora, si CD $\perp$ EF en el plano (ED), entonces CD es uno de los lados del ángulo rectilíneo correspondiente al diedro formado por los planos perpendiculares entre sí.

Luego, CD es perpendicular al otro lado CG de este ángulo y por consiguiente, en virtud del teorema 2, DC $\perp$(AB).

COROLARIO: 1: Si dos planos son perpendiculares entre sí y por un punto de intersección se traza la perpendicular a uno de ellos, ésta pertenece al otro plano.

Dem:

Indirecta, teor. 2, corol.1, teor. 18.

COROLARIO 2:

Si desde un punto de uno de los planos perpendiculares entre si, se baja la perpendicular al otro plano, ésta pertenece al primer plano.

Dem:

Indirecta.

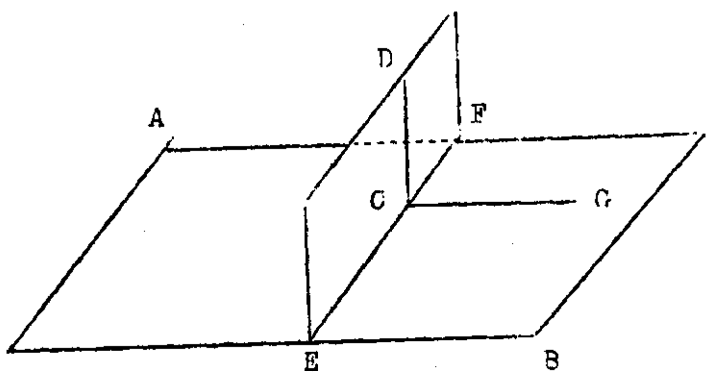

Fig. 9

COROLARIO 3:

Por una recta dada en un plano no se puede pasar más que un plano perpendicular a aquel.

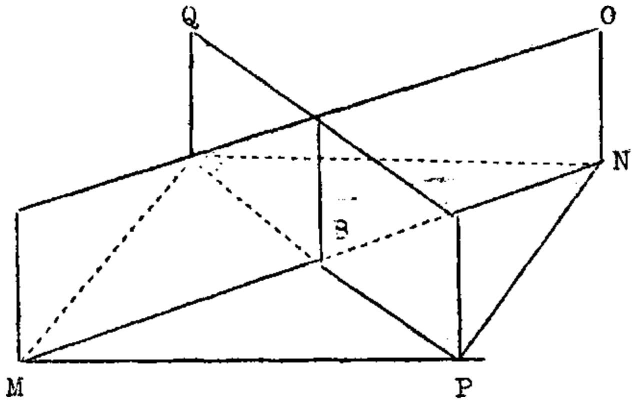

Fig. 10

TEOREMA 19:

La intersección de dos planos perpendiculares a un tercero, es perpendicular a este tercer plano.

D e m: (Fig. 10) Si en el punto B se levanta la perpendicular al plano (MN), ésta debe encontrarse a la vez en los planos (PQ) y (MO), luego, es la intersección de estos dos planos perpendiculares a (MN).

TEOREMA 20:

Todo plano que pasa por una recta perpendicular a otro plano, es perpendicular a este último.

D e m: Sencilla

COROLARIO:

Por toda recta oblícua o paralela a un plano, no se puede pasar mas que un solo plano perpendicular a aquel.

D e m:

Teor. 20, teor. 7, teor. 18, corol. 2.

E J E R C I C I O S

1.- Construir un plano perpendicular a un plano dado (MN) y que pase:

a) Por una recta situada en el plano (MN);
b) Por una recta paralela u oblícua a (MN).

2.- El plano del ángulo rectilíneo correspondiente a un diedro es perpendicular a la arista del diedro.

3.- Recíproco del anterior teorema.

4.- Si desde un punto dentro de la abertura de un diedro se bajan las perpendiculares a las caras del diedro, el ángulo formado, por las perpendiculares es el suplemento del ángulo rectilíneo correspondiente al diedro.

2.- DOS PLANOS PARALELOS:

TEOREMA 21:

Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí.

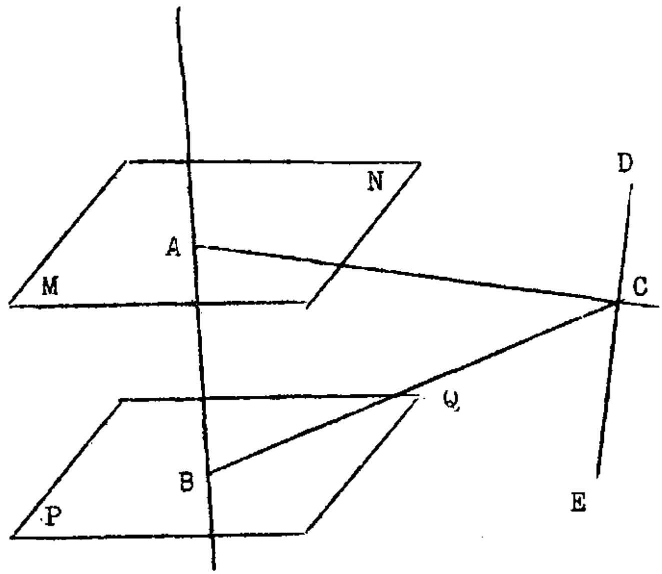

Fig. 11

Dem:

(fig. 11): Sean (MN) y (PQ) dos planos perpendiculares a la recta AB. Supongamos que no fueran paralelos y DE su intersección. Uniendo un punto C de ésta con A y B, tendríamos que en CAB $\sphericalangle$ CAB = CBA = R, lo que es imposible

Observación:

Este teorema demuestra la existencia de planos paralelos.

COROLARIO:

Por un punto situado en una recta o fuera de ella no se puede pasar más que un solo plano perpendicular a ella.

Problema fundamental:

Por un punto situado fuera de un plano dado, pasar un plano paralelo a él.

Construcción:

Bájese del punto la perpendicular al plano y pásese por el punto el plano perpendicular a la recta trazada.

TEOREMA 22:

Las intersecciones de planos paralelos con un tercer plano son paralelas entre sí. (Fig. 12)

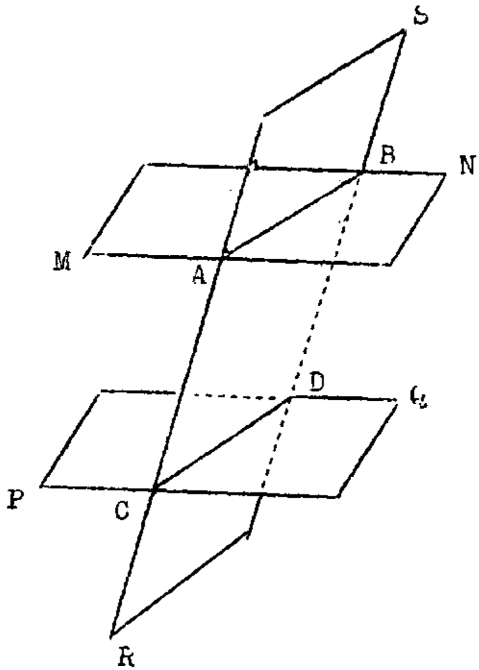

Fig. 12

Dem;

Sea (MN) y (PQ) dos planos paralelos y (RS)un plano que los corta en AB y CD. AB y CD están situados en un mismo plano y no pueden cortarse, puesto que su intersección sería un punto común a los dos planos (MN) y (PQ) supuestos paralelos y distintos.

Luego AB // CD.

TEOREMA 23:

Una recta perpendicular a uno de dos planos paralelos, lo es tambien al otro.

D e m:

Pásense por la recta dos planos que cortan los planos paralelos y aplíquese teor. 22.

TEOREMA 24:

Una recta que corta dos planos paralelos, forma ángulos iguales con ellos.

D e m:

Desde un punto cualquiera de la recta bájese la perpendicular a los dos planos y constrúyanse los ángulos que la recta forma con los planos paralelos.

TEOREMA 25:

Partes de rectas paralelas, interceptadas por planos paralelos, son iguales entre sí.

Dem:

Pasar un plano por dos de las rectas paralelas y emplear teor. 22.

COROLARIO:

Planos paralelos son equidistantes en toda su extensión.

EJERCICIOS:

1.- Los planos de dos ángulos cuyos lados son paralelos de dos en dos, son paralelos.

2.- Si un plano es paralelo a otro, toda recta situada en el primero es paralela al segundo.

3.- Todas las rectas paralelas a un plano que pasen por un mismo punto fuera de él, pertenecen a un plano paralelo al primero.

4.- Una recta que corta a uno de dos planos paralelos, debidamente prolongada corta también el otro.

5.- Tres o más puntos no situados en línea recta que se hallan a igual distancia y a un mismo lado de un plano, petenecen a un plano paralelo al primero.

6.- Los planos que interceptan partes iguales de tres rectas paralelas no situadas en un mismo plano, son paralelos.

7.- Dividir un ángulo diedro en 2^n partes iguales.

8.- Determinar el lugar geométrico de todos los puntos que tienen una distancia dada a un plano dado.

9.- Determinar el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de dos planos dados, a) si los planos son paralelos, b) si los planos se cortan.

10.- Construir una recta que sea perpendicular a dos rectas que se cruzan.

11.- Construir la más corta de todas las rectas que se pueden trazar entre dos rectas que se cruzan.

12.- Dado un punto fuera de dos planos dados, pasar por este punto un plano perpendicular a los dos planos dados.

13.- Pasar por un punto dado un plano que equidiste de tres puntos no situados en línea recta.

14.- Construir una recta que tenga a uno de dos planos no paralelos la distancia a y al otro, la distancia b.

15.- Dado un punto P fuera de un plano dado (MN), trazar por P una recta al plano (MN) que tenga una longitud dada a y sea paralela a otro plano dado (ES).

16.- El mismo problema, dándose en vez de la longitud a el ángulo que la recta pedida debe formar con el plano (MN).

COMBINACION DE TRES PLANOS

1.- TRES PLANOS PARALELOS;

TEOREMA 26: Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.

D e m:

Trazar una recta perpendicular a uno de los planos y emplear teors. 23 y 21.

COROLARIO 1:

Un plano que corta uno de los planos paralelos, corta tambien el otro.

COROLARIO 2:

Por un punto dado fuera de un plano no se puede hacer pasar más que un plano paralelo a él.

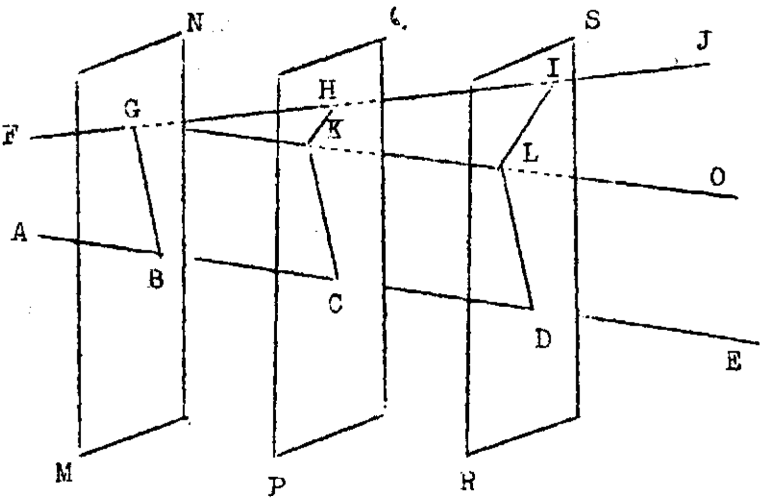

Fig. 13-

TEOREMA 27:

Si entre tres planos paralelos se trazan dos rectas cualesquiera, los segmentos de las rectas interceptados por los planos son proporcionales entre sí. (Fig.13)

D e m:

Sean (MN), (PQ), (RS) los tres planos paralelos y AE y FJ las dos recas que cortan los planos en B,C,D y G, H, I respectivamente. Trácese GO// AE y las rectas BG, CK, DL, HK, LI. Entonces se tiene:

GH : HI = GK : KL

GK = BC, KL = CD (teor 25),

luego GH : HI = BC : CD

lo que se propuso demostrar.

2.- DOS PLANOS PARALELOS Y UN PLANO SECANTE:

Dos planos paralelos cortados por un tercero forman ocho ángulos diedros. Si por un punto de la intersección del plano secante con uno de los planos paralelos, se pasa un plano perpendicular a esta recta, las intersecciones de los tres planos dados con el cuarto plano dan lugar a la formación de dos rectas paralelas cortadas por una tercera. Los ocho ángulos cóncavos de esta figura plana son los ángulos rectilíneos correspondientes a los ocho diedros. A estos diedros pueden aplicarse, por esto, tanto las denominaciones como los teoremas planimétricos.

3.- TRES PLANOS QUE SE CORTAN:

TEOREMA 28:

Si tres planos se cortan, sus intersecciones pasan por un mismo punto, o son paralelas o coinciden.

Dem:

1.) (Fig. 14): Si los planos M y N se cortan según la recta AA', M y P según la recta BB', O es el punto de intersección de AA' y BB'. O no solamente es un punto común de los planos M y N y de M y P, sino también de los planos N y P. Luego O es un punto de la intersección de N y P. Por consiguiente, las tres intersecciones pasan por el punto O.

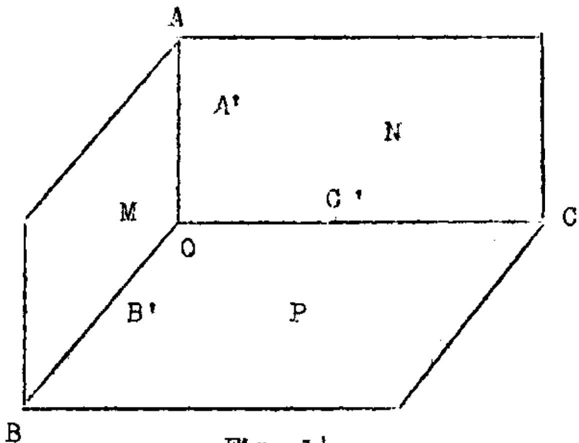

Fig. 14

2) (Fig. 15) Sea AA' la intersección de los planos (AC') y (A'B) y el plano (CB') paralelo a AA', entonces BB' y CC' son paralelas a AA', pues cada una de estas rectas está situada con AA' en un plano y no se pueden cortar, porque AA' es paralela al plano (CB').

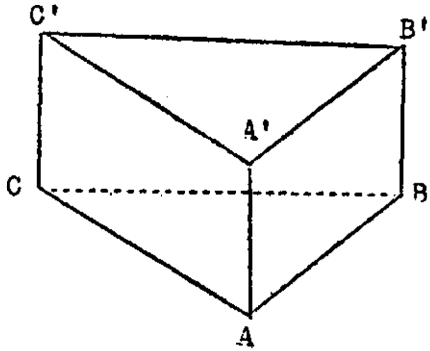

Fig. 15

3) (fig. 16). Las tres intersecciones paralelas coinciden, es decir, los planos pasan por una misma recta.

Definiciones:

Tres planos que pasan por una misma recta, forman seis diedros que tienen la arista común y son iguales de dos en dos. Tres planos que se cortan según tres rectas paralelas, forman un espacio prismático triangular abierto. Tres planos cuyas tres intersecciones pasan por un mismo punto, forman una cantidad angular llamada triedro. Más de tres planos cuyas intersecciones pasan por un mismo punto, forman un poliedro. Si las intersecciones de estos planos son paralelas entre sí, el espacio abierto que se origina se llama prismático poligonal. (Ver fig. 16 en la pág. siguiente).

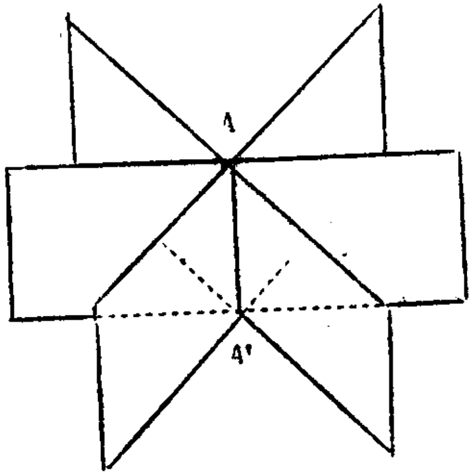

Fig. 16